Fiche
Processus stochastiques et produits dérivés

Antoine Falck

6 décembre 2017

Table des matières

Première partie

1 Formule de BS, ramifications, conventions de marché

1.1 Valorisation sans modèle, AOA

Définition 1.1 (Marché sans friction)**.** C'est un marché où les différentes hypothèses sont réalisées :

— Pas de coûts de transactions [1].

— Pas de taxes.

— Pas d'écart entre prix d'achat et de vente (*bis-ask spread).*

— Grande liquidité et ordre fractionnable.

— Vente à découvert autorisée.

— Les participants au marché sont *price-takers* (prix exogène).

Définition 1.2 (AOA)**.** L'Absence d'Opportunité d'Arbitrage est une situation où il est impossible de faire un profit à coup sûr.

Théorème 1.1. *Dans un marché sans friction il y a AOA.*

Corollaire 1.1.1 (Unicité des prix)**.** *Si deux portefeuilles conduisent aux mêmes flux dans tous les scénarios, alors ces deux portefeuilles ont même prix à toute date intermédiaire.*

On définit le prix à terme $F_t(S_T,T)$ comme le prix à t pour avoir un flux S_T en T, dont le prix est payé en T.
On définit le prix comptant $C_t(S_T,T)$ comme le prix à t pour avoir un flux S_T en T, dont le prix est payé en t.

Exemple 1.1. Si S_t est un actif négociable qui ne verse pas de dividende on a $S_t = C_t(S_T,T)$. La preuve vient du Corollaire 1.1.1.

On note $B(t,T)$ le prix comptant [2] en t pour avoir un flux de 1€en T, on a donc,

$$F_t(S_T,T)\ B(t,T) \quad = \quad C_t(S_T,T).$$

On rappelle qu'un *call* (respectivement un *put*) est un produit qui nous rend possible l'achat (respectivement la vente) d'un sous-jacent S au prix K à la date T. On a les relations,

$$Call_T(T,K) \quad = \quad (S_T-K)^+\ ; \tag{1.1}$$
$$Put_T(T,K) \quad = \quad (K-S_T)^+. \tag{1.2}$$

Théorème 1.2 (Relation parité *call-put*)**.** *Si le sous-jacent S ne délivre pas de dividende,*

$$Call_t(T,K) - Put_t(T,K) \quad = \quad S_t - KB(t,T). \tag{1.3}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} Call_T(T,K) - Put_T(T,K) \quad &= \quad (S_T-K)^+ - (K-S_T)^+ \\ &= \quad S_T - K. \end{aligned}$$

Donc à t,

$$Call_t(T,K) - Put_t(T,K) \quad = \quad S_t - KB(t,T).$$

□

Proposition 1.3. *On a les propositons suivantes :*

(i) $Call_t(T,K) \le C_t(S_T,T)$.
$Call_t(T,K) \le S_t$ *si le sous-jacent ne verse pas de dividende.*

(ii) $Call_t(T,K) \ge (S_t - KB(t,T))^+$.

(iii) $Call_t(T,K)$ *est convexe en* K.

(iv) $Call_t(T,K)$ *est décroissant en* K.

Théorème 1.4. *Les call-put forment un système générant les prix d'options vanille de flux $h(S_T)$ pour les fonctions payoff h-smooth. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$,*

$$\begin{aligned} C_t\left(h(S_T),T\right) \quad &= \quad \int_{x_0}^{\infty} h''(k) Call_t(T,k)\ \mathrm{d}k \\ &\quad + \int_0^{x_0} h''(k) Put_t(T,k)\ \mathrm{d}k \\ &\quad + h'(x_0)\left(C_t(S_T,T) - x_0 B(t,T)\right) \\ &\quad + h(x_0)B(t,T). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Démonstration. Soit $I := \int_{x_0}^{\infty} h''(k)(x-k)^+\ \mathrm{d}k + \int_0^{x_0} h''(k)(k-x)^+\ \mathrm{d}k$. Pour $x < x_0$ on a,

$$\begin{aligned} I \quad &= \quad 0 + \int_x^{x_0} h''(k)(k-x)\ \mathrm{d}k \\ &= \quad [h'(k)(k-x)]_x^{x_0} - \int_x^{x^0} h'(k)\ \mathrm{d}k \\ &= \quad h'(x_0)(x_0-x) - h(x_0) + h(x). \end{aligned}$$

On a le même résultat pour $x > x_0$. □

Remarque. En prenant $x_0 := F_t(S_T,T)$ et si le sous-jacent ne verse pas de dividende on a une formule simplifiée.

1.2 Espérance des flux actualisés

On se donne $C_0(\psi_T,T)$ comme une espérance (pour la linéarité) avec une pondération positive L_T,

$$C_0(\psi_T,T) \quad = \quad \mathbb{E}\left[\psi_T L_T e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right]\ ,$$

où r_t est le taux d'intérêt de placement de *cash* à la date t. On a par définition $C_0\left(e^{\int_0^T r_s \mathrm{d}s}, T\right) = 1$, il faut donc satisfaire la condition $\mathbb{E}[L_T] = 1$. L_T est un bon candidat pour un changement de probabilité :

$$\mathbb{Q}(A) \quad = \quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_A L_T].$$

D'où $C_0(\psi_T,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\psi_T e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right]$. On souhaite que si S ne verse pas de dividende que $C_0(S_T,T) = S_0$, donc

$$S_0 \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_T e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right]. \tag{1.5}$$

1. On pourra considérer que ce point est réalisé quand le prix du produit est bien supérieur au coût de la transaction.
2. On appelle cela un zéro coupon.

Remarque. On verra plus tard que la mesure $\mathbb{Q}$ s'appelle la mesure martingale, ou bien de risque neutre.

Pour le prix d'un *call* on a,

$$Call_0(T,K) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T-K)^+ e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right]. \qquad (1.6)$$

Proposition 1.5 (Breeden–Litzenberg)**.**

$$\partial_K Call_0(T,K) \quad = \quad -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{S_T>K} e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right].$$

1.3 Calcul effectif dans le cas log-normal (BS)

Théorème 1.6 (Formule de Black & Scholes)**.** *On a le modèle sous $\mathbb{Q}$ du sous-jacent : $S_T = S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T}$, où W est un mouvement brownien, r le taux d'intérêt sans risque (constant) et σ la volatilité du sous-jacent. Alors,*

$$Call_0(T,K) \quad = \quad S_0\Phi(d_1) \; - \; Ke^{-rT}\Phi(d_2) \; ; \qquad (1.7)$$

avec

$$d_1 \quad = \quad \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{S_0}{Ke^{-rT}}\right) \; + \; \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \; ; \qquad (1.8)$$

$$d_2 \quad = \quad d_1 \; - \; \sigma\sqrt{T}. \qquad (1.9)$$

Démonstration. On a,

$$\begin{aligned} & S_T > K \\ \Leftrightarrow \quad & Z > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln\left(\frac{Ke^{-rT}}{S_0}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} =: -d_2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} Call_0(T,K) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z} - K\right)\mathbb{1}_{Z>-d_2}\right] \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x-\sigma\sqrt{T}\right)^2} \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dans la première intégrale on fait le changement de variable $y = x - \sigma\sqrt{T}$, et on note $d_1 := d_2 + \sigma\sqrt{T}$.

$$\begin{aligned} Call_0(T,K) &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_1}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}y \\ &\quad - \frac{Ke^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x \\ &= S_0\Phi(d_1) \; - \; Ke^{-rT}\Phi(d_2). \end{aligned}$$

□

1.4 Calcul des grecques

Proposition 1.7. *Dans le modèle de Black & Scholes on trouve des formules explicites de grecques.*

$$\begin{aligned} \Delta^C &= \Phi(d_1) \\ \Gamma^C &= \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Delta^C &= \Phi(d_1) \; + \; S_0\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S_0} \qquad (1.10) \\ &\quad - \; Ke^{-rT}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S_0}. \qquad (1.11) \end{aligned}$$

On a $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S}$, il suffit donc de montrer que :

$$S_0\Phi'(d_1) \quad = \quad Ke^{-rT}\Phi'(d_2).$$

Or,

$$\begin{aligned} & S_0 e^{-\frac{d_1^2}{2}} = Ke^{-rT} \; e^{-\frac{d_2^2}{2}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{S_0 e^{rT}}{K} = \exp\left(\frac{d_1^2 - d_2^2}{2}\right) \end{aligned}$$

On voit aisément que :

$$\begin{aligned} d_1^2 - d_2^2 &= d_1^2 \; - \; \left(d_1 - \sigma\sqrt{T}\right)^2 \\ &= 2d_1\sigma\sqrt{T} \; - \; \sigma^2 T \\ &= 2\left(\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + rT\right) \\ &= 2\ln\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right) \end{aligned}$$

□

1.5 Volatilité implicite BS

Dans la formule de Black & Scholes on a tous les paramètres disponibles sur la marché excepté la volatilité σ. La question que l'on va se poser dans cette section est donc du choix de σ.

1.5.1 Méthode historique (statistique)

On suppose que nos observations suivent le modèle log-normal pour les sous-jacents, on a donc

$$\ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right) \quad = \quad \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1}-t_i) + \sigma(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}).$$

D'où,

$$\ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right)\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}} \sim \mathcal{N}\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{t_{i+1}-t_i}, \sigma^2\right) \; ,$$

et la moyenne de la gaussienne est approximativement égale à zéro en haute fréquence. On a donc une observation d'un échantillon gaussien indépendant de loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. L'estimateur naturel de la variance est,

$$s_n^2 \quad := \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right)\frac{1}{\sqrt{t_{i+1}-t_i}}\right)^2.$$

Remarque. On a pas forcément la même probabilité d'observation, en particulier le paramètre r est en fait un μ différent. Mais cela n'a pas d'importance puisqu'on considère ensuite que la moyenne est nulle en haute fréquence.

On retient deux problèmes principaux avec cette méthode :

- les données sont non stationnaires, notre estimation dépendra fortement de la fenêtre de données ;
- il existe sur le marché les prix des *call-put*, information que l'on exploite pas ici.

1.5.2 Volatilité implicite

L'idée est qu'il existe les prix de marché [3] $Call_0^M(T,K)$ pour plusieurs (T,K). On cherche donc σ compatible avec ces données de marché.

Définition 1.3 (Volatilité implicite)**.** La volatilité implicite $\sigma_I(T,K)$ pour la maturité T et le *strike* K vérifie

$$Call^{BS}(T,K,S_0,\sigma_I(T,K)) \quad = \quad Call^M(T,K).$$

Lemme 1.8. *La volatilité implicite existe et est unique.*

Démonstration. Les prix de marché sont dans la borne d'arbitrage qui est $\left[(S_0 - K^{-rT})^+, S_0\right]$. Et on bien,

$$\begin{array}{rcl} Call^{BS} & \xrightarrow[\sigma\to\infty]{} & S_0 \ , \\ Call^{BS} & \xrightarrow[\sigma\to 0]{} & (S_0 - Ke^{-rT})^+. \end{array}$$

Et de plus $\sigma \mapsto Call^{BS}$ est continue et croissante ($\nu(C) > 0$) ce qui termine la preuve. ☐

Remarque. En pratique le calcul de σ_I est fait par méthode de Newton.

Si le modèle de Black & Scholes était bon on aurait $(T,K) \mapsto \sigma_I(T,K)$, on observe pourtant à T fixé un *smile* sur les marchés FOREX, un skew positif sur les matières premières et un skew négatif sur les indices et actions.

En fait il faut voir la volatilité implicite comme une grille de lecture des prix, on peut comparer les prix en se ramenant "au même *strike*".

2 Calcul d'espérance – Prix dans d'autres modèles

2.1 Modèle log-normal décalé

Définition 2.1 (Modèle LND)**.** À taux nul, $r = 0$, on a le prix d'un actif au temps T :

$$S_T \quad = \quad (S_0 + a)e^{\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T} \ - \ a \ ,$$

où $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $S_0 + a > 0$. Il faut interpréter cela comme $S_T + a$ qui suit un modèle log-normal.

Définition 2.2 (Volatilité instantanée)**.** La volatilité instantanée σ_t au temps t est définie par :

$$\sigma_t \Delta W_t \quad = \quad \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t}.$$

3. On note $Call^M$ pour *market*.

Proposition 2.1. *La volatilité instantanée au temps t est $\sigma_t = \frac{S_t + a}{S_t}\sigma$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned} \sigma_t &\triangleq \frac{S_{t+\Delta t} - S_t}{S_t} \\ &= \frac{(S_{t+\Delta t} + a) - (S_t + a)}{S_t} \\ &= \frac{S_t + 1}{S_t}\left(e^{\sigma W_{t+\Delta t} - \frac{1}{2}\sigma^2(t+\Delta t) - \sigma W_t + \frac{1}{2}\sigma^2 t} - 1\right) \\ &= \frac{S_t + 1}{S_t}\left(e^{\sigma \Delta W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 \Delta t} - 1\right). \end{aligned}$$

Comme $\Delta t \to 0$ on a $e^{\sigma\Delta W_t - \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} = 1 + \sigma\Delta W_t + o(\Delta W_t)$. Ce qui termine la preuve. ☐

Théorème 2.2 (Prix de *call*)**.** *Le prix de call de strike K et de maturité T dans le modèle log-normal décalé est donné par*

$$Call^{LND}(T,K,S_0,\sigma,a) \quad = \quad Call^{BS}(T,K+a,S_0+a,\sigma).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} Call^{LND}(T,K,S_0,\sigma,a) &\triangleq \mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT}((S_T + a) - (K + a))^+\right]. \end{aligned}$$

Or $S_T + a$ suit une dynamique Black & Scholes avec comme constante devant l'exponentielle $S_0 + a$. ☐

Théorème 2.3 (Asymptotique des volatilités implicites)**.** *La volatilité implicite dans ce modèle a une valeur et une pente explicite à courte maturité et à la monnaie :*

(i) $\lim_{T\to 0}\sigma_I(T,S_0) = \frac{S_0+a}{S_0}\sigma = \sigma_0$ *;*

(ii) $\lim_{T\to 0}\partial_K\sigma_I(T,S_0)|_{K=S_0} = \frac{-a\sigma}{2S_0^2} = \frac{1}{2}\partial_{S_0}\sigma_0$.

Démonstration. On a par définition de la volatilité implicite $Call^{LND}(T,K,S_0,\sigma a) = Call^{BS}(T,K,S_0,\sigma_I) = Call^{BS}(T,K+a,S_0+a,\sigma)$.

(i). Lorsque $K = S_0$ et $T \to 0$, $Call^{BS}(T,K+a,S_0+a,\sigma) \xrightarrow[T\to 0]{} 0$ et donc nécessairement $\sqrt{T}\sigma_I$ a une limite, et cette limite est 0. On fait donc un développement limité autour de 0 sur Φ. En réarrangeant les termes on obtient,

$$S_0\phi(0)\sigma_I\sqrt{T}(1 + o(1)) \quad = \quad (S_0 + a)\phi(0)\sigma\sqrt{T}(1 + o(1)).$$

Ce qui prouve bien que $\sigma_I(I,S_0) \xrightarrow[T\to 0]{} \sigma\frac{S_0+a}{S_0}$.

(ii). On a d'un côté

$$\begin{aligned} \partial_K Call(T,K,\sigma_I(T,K)) &= \partial_K Call(T,K,\sigma_I) \\ &\quad + \partial_\sigma Call(T,K,\sigma_I)\frac{\partial\sigma_I}{\partial K} \\ &= -\Phi(d_1(T,K,S_0,\sigma_I)) \\ &\quad + S_0\sqrt{T}\phi(d_2(T,K,S_0,\sigma_I))\frac{\partial\sigma_I}{\partial K}. \end{aligned}$$

De l'autre côté on a

$$\partial_K Call(T, K+a, \sigma) \quad = \quad -\Phi(d_1(T, K+a, S_0+a, \sigma)).$$

On a de plus $S_0 = K$ et $T \to 0$ on fait donc un développement de Taylor au premier ordre autour de 0,

$$\frac{1}{2}\sigma_I + S_0 \left.\frac{\partial \sigma_I}{\partial K}\right|_{K=S_0} + o(\sqrt{T}) \quad = \quad \frac{1}{2}\sigma + o(\sqrt{T}).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial \sigma_I}{\partial K}\right|_{K=S_0} &\xrightarrow[T\to 0]{} \frac{1}{S_0}\left(\frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2}\sigma_I\right) \\ &\xrightarrow[T\to 0]{} -\frac{1}{2S_0}\left(\sigma\frac{S_0+a}{S_0} - \sigma\right) \\ &\xrightarrow[T\to 0]{} -\frac{a\sigma}{2S_0^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial \sigma_0}{\partial S_0}. \end{aligned}$$

□

Ce qui nous permet de calibrer le modèle, *i.e.* d'adapter le σ et a.

2.2 Modèle de Bachelier

Définition 2.3 (Modèle de Bachelier)**.** Dans le modèle de Bachelier le prix des sous-jacents suit un modèle gaussien, *i.e.*

$$S_t \quad = \quad S_0 \; + \; \sigma W_t.$$

Théorème 2.4. *Dans le modèle de Bachelier le prix d'un call de strike K et de maturité T est donné par*

$$\begin{aligned} Call^B(T, K, S_0, \sigma) \quad &= \quad (S_0 - K)\Phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &\quad + \sigma\sqrt{T}\phi\left(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.5. *En posant $\sigma^B = \sigma^{BS} S_0$, à la monnaie on a*

$$\frac{Call^B - Call^{BS}}{Call^B} \quad \leq \quad \frac{T\left(\sigma^{BS}\right)^2}{12}.$$

2.3 Modèle d'actifs négociables de Merton

Définition 2.4. N est un processus de Poisson d'intensité λ, $Y = (Y_i, i \geq 1)$ iid de loi log-normale t.q.

$$\ln(1 + Y_i \quad \sim \quad \mathcal{N}\left(\ln(1+m) - \frac{\alpha^2}{2}, \alpha^2\right) \;,$$

avec $m > -1$ et $\alpha \geq 0$. N et Y sont indépendants et on définit

$$S_t \quad = \quad S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_t} \prod_{i=1}^{N_t}(1 + Y_i).$$

Entre deux sauts on a un mouvement brownien géométrique, le temps entre deux sauts suit une loi exponentielle de paramètre λ et au moment du saut on a un saut log-normal.

Proposition 2.6. $\mathbb{E}[S_t] = S_0 e^{rt}$ *ssi* $\mu = r - \lambda m$.

Théorème 2.7 (Formule de Merton)**.** *Le prix d'un call dans la formule de Merton est donné par*

$$\sum_{k\geq 0} e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot Call^{BS}(S_0(1+m)^k e^{-m\lambda T}, T, K, \sigma^2 + \frac{\alpha^2 k}{T}).$$

2.4 *Pricing* en Fourier

Il y a en réalité peu de modèles où l'on peut calculer explicitement $\mathbb{E}[(S_t - K)^+]$. Par contre dans beaucoup de cas on connaît la fonction caractéristique $\mathbb{E}\left[e^{iuX_t}\right]$. On va voir dans la suite comment utiliser cette fonction pour *pricer* un *call*.

On suppose connue la fonction caractéristique de $X_t = \ln(S_t e^{-rt})$:

$$\varphi(z) \quad := \quad \mathbb{E}[e^{zX_t}] \;, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Théorème 2.8 (Formule de Carr-Madan)**.** *On pose $C(k) := e^{-rt}\mathbb{E}[(e^{X_t + rt} - e^k)^+]$, $k \in \mathbb{R}$, et $z(k) = e^{\alpha k}C(k)$ avec $0 < \alpha < p - 1$ où p est le nombre de moments finis de S_t. Alors*

$$\begin{aligned} \hat{z}(u) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} z(k) \; \mathrm{d}k \\ &= \quad e^{(iu+\alpha)rt}\frac{\varphi(iu + \alpha + 1)}{(iu+\alpha)(iu+\alpha+1)} \;, \end{aligned}$$

et,

$$C(k) \quad = \quad e^{-\alpha k}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iuk}}{2\pi} e^{(iu+\alpha)rt}\frac{\varphi(iu+\alpha+1)}{(iu+\alpha)(iu+\alpha+1)}.$$

Démonstration. Prouvons l'intégrabilité. Lorsque $k \to -\infty$, $C(k)$ tend vers une constante et on a donc bien $C(k)e^{\alpha k} \in L^1(\mathbb{R})$. Voyons en $+\infty$,

$$\begin{aligned} C(k) \quad &\leq \quad e^{-rt}\mathbb{E}\left[e^{rt + X_t}\mathbb{1}_{e^{-rt+X_t} \geq e^k}\right] \\ &\leq \quad e^{-rt}\mathbb{E}\left[e^{p(rt+X_t)}e^{-(p-1)k}\right] \;, \quad p > 1 \;, \end{aligned}$$

intégrable si $\mathbb{E}[S_t^p] < \infty$. D'où $C(k) \leq ce^{-(p-1)k + \alpha k}$, intégrable si $\alpha < p - 1$ et le moment d'ordre p de S_t existe.

Démontrons la formule.

$$\begin{aligned} \hat{z}(u) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}} e^{(iu+\alpha)k - rt}\mathbb{E}[(e^{X_t+rt} - e^k)^+] \; \mathrm{d}k \\ &= \quad \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{X_t+rt} e^{(iu+\alpha)k + X_t} \; \mathrm{d}k \right. \\ &\qquad \left. - \int_{-\infty}^{X_t+rt} e^{(iu+\alpha+1)k - rt} \; \mathrm{d}k\right] \\ &= \quad e^{(iu+\alpha)rt}\frac{\varphi(iu+\alpha+1)}{(iu+\alpha)(iu+\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Ensuite $C(k) = e^{-\alpha k}z(k) = e^{-\alpha k}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iu}}{2\pi}\hat{z}(u) \; \mathrm{d}u.$ □

Théorème 2.9 (Formule de Lewis)**.** *On a la formule d'un call,*

$$e^{-rT}\mathbb{E}\left[(e^{X_T+rT}-K)^+\right] = S_0 - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}-iu\right)\ln\left(Ke^{-rT}\right)}}{\frac{1}{4}+u^2}\varphi\left(\frac{1}{2}+iu\right)\ \mathrm{d}u$$

Démonstration. On rappelle la formule de Parseval, pour $(f,g)\in L^1\times L^2$, $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\hat{f}(u)}\hat{g}(u)\mathrm{d}u$. On a aussi la relation $(x-K)^+ = x-\min(x,K)$. Donc, $\mathbb{E}[e^{-rT}\min(e^{rT+X_T},K)] = \int f(x)g(x)\mathrm{d}x$, avec $f(x) = e^{-rT}\min(e-rT+x,K)e^{-\frac{1}{2}x}$ et $g(x)=e^{\frac{1}{2}x}p(x)$, où p est la densité de X_T. En calculant $\hat{g}(u)$ et $\hat{f}(u)$ puis avec la formule de Parseval et enfin le fait que $Call(S_0,K) = \underbrace{C_0(S_T,T)}_{=S_0} + C_0(\min(S_T,K),T)$, on trouve la relation. □

2.5 Comportement des vols implicites dans les ailes

On prend les notations suivantes

- $B_0 = e^{-rT}$ le facteur d'actualisation
- $F_0 = \frac{S_0}{B_0}$ le prix *forward* sans dividendes
- $x = \ln\frac{K}{F_0}$ la log *moneyness*, donc $K(x) := F_0e^x$
- $I(x)$ la vol implicite à la *moneyness* x.

On a donc dans un certain modèle

$$C(K(x)) \ := \ B_0\mathbb{E}[(S_T-K(x))^+].$$

Lemme 2.10. *Pour tout $p>0$ et $K>0$,*

$$C(K) \ \leq \ \frac{B_0\mathbb{E}[S_T^{p+1}]}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p K^{-p}.$$

Démonstration. Pour tout $S>0$ on a

$$S-K \ \leq \ \frac{S^{p+1}}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^p K^{-p}\ ,$$

en effet les deux membres on même valeur et même dérivée au point $K\frac{p+1}{p}$, mais le membre de droite a une dérivée seconde positive. Comme le membre de droite est positif on peut remplacer le membre de gauche par $(S-K)^+$. Enfin on remplace S par S_T, on prend l'espérance et on multiplie par B_0 pour avoir l'expression. □

Corollaire 2.10.1. *Si $\mathbb{E}[S_T^{p+1}] < \infty$, alors $C(K) = O(K^{-p})$ lorsque $K\to\infty$.*

Lemme 2.11. *Pour tout $p>0$,*

$$B_0\mathbb{E}[S_T^{p+1}] \ = \ \int_0^\infty p(p+1)K^{p-1}C(K)\ \mathrm{d}K.$$

Démonstration. On applique le Théorème 1.4 avec $x_0=0$ et $h(x)=x^{p+1}$. □

Lemme 2.12 (Inégalités de Mills)**.** *On note Φ la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite, alors pour $x\geq 0$*

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{x}{x^2+1} \ \leq \ \Phi(-x) \ \leq \ \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}.$$

Lemme 2.13. *Pour x grand,*

$$I(x) \ < \ \sqrt{\frac{2|x|}{T}}\ ,$$

et on a

(i) $\beta(x) := \frac{I^2(x)T}{x}\in[0,2]$ *;*
(ii) $\beta_R\leq 2$.

Démonstration. Comme le vega est positif, cette preuve revient à montrer que

$$C^{BS}(I(x)) \ < \ C^{BS}\left(\sqrt{\frac{2|x|}{T}}\right)\ ,$$

pour x grand. Le membre de gauche tend vers 0 lorsque $x\to\infty$. Montrons alors que le membre de droite est strictement positif.

$$C^{BS}\left(\sqrt{\frac{2|x|}{T}}\right) \ = \ B_0F_0\left(\Phi(0)-e^x\Phi\left(-\sqrt{2x}\right)\right) \ \xrightarrow[x\to\infty]{} \ \frac{1}{2}B_0F_0\ ,$$

grâce au Lemme 2.12. □

Lemme 2.14. *En posant*

$$f_\pm(\beta) \ = \ \frac{1}{\beta}+\frac{\beta}{4}\pm 1\ ,$$

on a

$$C^{BS}(I(x)) \ = \ B_0F_0\Phi\left(-\sqrt{xf_-(\beta(x))}\right) - B_0F_0e^x\Phi\left(-\sqrt{xf_+(\beta(x))}\right)$$

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{x}{I(x)\sqrt{T}} - \frac{I(x)\sqrt{T}}{2} \\ &= -\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}+\frac{\sqrt{\beta}}{2}\right) \\ &= -\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{\beta}+\frac{\beta}{4}-1}. \end{aligned}$$

□

Théorème 2.15 (Aile droite, $x\to\infty$)**.** *Soit $\tilde{p} := \sup\{p\geq 0 : \mathbb{E}[S_T^{p+1}]<\infty\}$ et $\beta_R := \limsup_{x\to\infty}\frac{I^2(x)T}{|x|}$. Alors*

(i) $\beta_R\in[0,2]$ *;*
(ii) $\tilde{p} = \frac{1}{2\beta_R}+\frac{\beta_R}{8}-\frac{1}{2}$.

Théorème 2.16 (Aile gauche, $x\to-\infty$)**.** *Soit $\tilde{q} := \sup\{q\geq 0 : \mathbb{E}[S_T^{-q}]<\infty\}$ et $\beta_L := \limsup_{x\to-\infty}\frac{I^2(x)T}{|x|}$. Alors*

(i) $\beta_L \in [0,2]$;
(ii) $\tilde{q} = \frac{1}{2\beta_L} + \frac{\beta_L}{8} - \frac{1}{2}$.

Démonstration. Le Lemme 2.13 implique que $\beta_R \in [0,2]$. On doit montrer que $\tilde{p} = \frac{f_-(\beta_R)}{2}$. Pour tout $\beta \in]0,2[$ on a,

$$\frac{e^{-cx}}{C^{BS}\left(\sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{pour } c > \frac{f_-(\beta)}{2} \\ \infty & \text{pour } c \leq \frac{f_-(\beta)}{2} \end{cases}$$

Pour prouver que $\tilde{p} \leq \frac{f_-(\beta_R)}{2}$, on note que $f_- :]0,2] \to [0,\infty[$ est strictement décroissante. Il suffit donc de montrer que pour tout $\beta \in]0,2[$ avec $\frac{f_-(\beta)}{2} < \tilde{p}$, on a $\beta_R \leq \beta$. On choisit $p \in \left]\frac{f_-(\beta)}{2}, \tilde{p}\right[$, on a par le Corolaire 2.10.1, lorsque $x \to \infty$,

$$\frac{C^{BS}(I(x))}{C^{BS}\left(\sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} = \frac{O(e^{-px})}{C^{BS}\left(\sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)} \to 0.$$

Et vega positif donc lorsque x grand, $\beta(x) \leq \beta$.

Pour prouver que $\tilde{p} \leq \frac{f_-(\beta_R)}{2}$, il suffit de montrer que pour tout $p \in \left]0, \frac{f_-(\beta)}{2}\right[$ on a $\mathbb{E}[S_T^{1+p}] < \infty$. On choisit β t.q. $Q := \frac{f_-(\beta)}{2} \in \left]p, \frac{f_-(\beta_R)}{2}\right[$. Pour x assez grand,

$$\begin{aligned} \frac{C(K(x))}{e^{-Qx}} &= \frac{C^{BS}(I(x))}{e^{-Qx}} \\ &\leq \frac{C^{BS}\left(\sqrt{\frac{\beta|x|}{T}}\right)}{e^{-Qx}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Il existe donc K_* t.q. pour tout $K > K_*$ on ait $C(K) < K^{-Q}$. Et donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_T^{p+1}] &= B_0^{-1} \int_0^\infty p(p+1) K^{p-1} C(K) \, \mathrm{d}K \\ &\leq p(p-1) B_0^{-1} \left(\int_0^{K_*} K^{p-1} C(K) \, \mathrm{d}K \right. \\ &\qquad \left. + \int_{K_*}^\infty K^{p-1-Q} \, \mathrm{d}K \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Où on a utilisé le Lemme 2.11. □

3 Couverture des risques : cas vanille en dim 1 avec MBG

3.1 Autofinancement, couverture dynamique

Définition 3.1 (*Call*)**.** Droit d'acheter (mais pas l'obligation) un actif négociable S sur le marché à K Euros (K le prix d'exercice, *strike*) à la date future T fixée (échéance, maturité).

C'est équivalent à recevoir un flux $(S_T - K)^+$.

On note deux problématiques :

— Quel est le prix de tel contrat optionnel (ce qui détermine le montant de la prime que l'acheteur doit verser au vendeur à la signature du contrat) ? C'est la question de valorisation.

— Quelle attitude doit adopter le vendeur une fois qu'il a vendu un tel produit et ainsi endossé (à la place de l'acheteur) le risque d'une hausse du titre à maturité ? C'est la question de couverture du risque de marché.

Dans le modèle de Black & Scholes on va se donner une méthode pour couvrir dynamiquement son portefeuille. Une stratégie simple de portefeuille investi dans le titre S et dans le *cash* $S_0^t = e^{rt}$ est la donnée de deux processus $(\delta^0(t), \delta(t))$ de la forme

$$\delta(t) = \delta_0 \mathbb{1}_{[0,t_1]} + \cdots + \delta_{n-1} \mathbb{1}_{]t_{n-1},t_n]}(t)$$

et de manière analogue pour δ^0. La valeur liquidative du portefeuille à la date t est :

$$V_t = \delta^0(t) S_t^0 + \delta(t) S_t.$$

La convention veut que $(\delta^0(t), \delta(t))$ sont respectivement le nombre de *cash* et de titre.

Proposition 3.1. *Pour $t \in]t_{k-1}, t_k]$, intervalle sur lequel $\delta^0(t)$ et $\delta(t)$ sont constants, la variation de la valeur de portefeuille s'écrit*

$$\begin{aligned} V_{t_k} - V_t &= \delta_{k-1}^0 (S_{t_k}^0 - S_t^0) + \delta_{k-1}(S_{t_k} - S_t) \\ &= \int_{t_k}^t \delta^0(u) \, \mathrm{d}S_u^0 + \delta(u) \, \mathrm{d}S_u. \end{aligned}$$

On veut que le portefeuille soit autofinancé, ce qui nous donne la condition :

$$\delta_{k-1}^0 S_{t_k}^0 + \delta_{k-1} S_{t_k} = \delta_k^0 S_{t_k}^0 + \delta_k S_{t_k}$$

Définition 3.2. La valeur d'un portefeuille autofinançant a pour dynamique

$$V_t = V_0 + \int_0^t r V_u \, \mathrm{d}u + \int_0^t \delta(u)(\mathrm{d}S_u - r S_u \, \mathrm{d}u).$$

Remarque. En effet $(V_t)_t$ est déterminé par V_0 et $\delta(u)$ étant donné que la part du *cash* se déduit de $\delta^0(t) = \frac{V_t - \delta(t) S_t}{S_t^0}$ et ensuite on a $\frac{\mathrm{d}S_u^0}{S_u^0} = r \, \mathrm{d}u$.

Le vendeur de l'option doit déterminer une couverture $(\delta(t))_t$ et une richesse initiale V_0 tels que

$$\mathrm{d}V_t = r V_t \, \mathrm{d}t + \delta(t)(\mathrm{d}S_t - r S_t \, \mathrm{d}t) ,$$

avec une erreur de couverture nulle définie comme

$$\varepsilon_T := V_T - h(S_T) ,$$

où h est le *payoff*.

3.2 Résolution par équation aux dérivées partielles

Théorème 3.2. *Soit h une fonction mesurable pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t,x)$ sur $]0,T[\times\mathbb{R}_+^*$*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x)+rxv_x(t,x)+v_t(t,x)-rv(t,x) & =0 \\ v(T,x) & =h(x) \end{cases}$$

Alors le flux $h(S_T)$ est duplicable par un portefeuille autofinançant, dont la valeur à la date t est $v(t,S_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta(t,S_t)=v_x(t,S_t)$.

Démonstration. On écrit l'égalité entre l'EDP précédente et la condition d'autofinancement, et on identifie $\delta(t)$ par le seul élément en $\mathrm{d}S_t$. □

3.3 Delta-Hedging à temps discret

La réplication parfaite sans risque résiduel suppose entre autres le rebalancement en temps continu du portefeuille. Ce qui est impossible en pratique. On rebalance donc à temps discret et si la fréquence en grande, le *tracking error* "doit" être petit.

Prenons le cas du *call*. On a $\delta(t)=C_x(t,S_t)=\Phi(d_1)$, avec les dates de rebalancement $0=:t_0<\cdots<t_N:=T$. On a donc $\delta_t=C_x(t_t,S_{t_i})$ pour $t\in]t_i,t_{i+1}]$ et un portefeuille résultant V_T^N. On rappelle le *tracking error* :

$$\varepsilon_T^N \quad = \quad V_T^N \ - \ (S_T-K)^+$$

Théorème 3.3. $\mathbb{E}[|\varepsilon_T^N|^2]\sim\frac{C}{N}$ *lorsque* $N\to\infty$.

3.4 Couverture en Delta-Gamma à temps discret

3.5 Raffinements supplémentaires sur la formule de BS

On étant les résultats précédents aux titres délivrant un dividende. Détenir S pendant $\mathrm{d}t$ rapporte $S\times q\times\mathrm{d}t$.

Définition 3.3. Une portefeuille autofinançant investi dans le *cash* et le titre S (versant un dividende continu de taux q par unité de temps) a à la date t pour valeur liquidative $V_t=\delta^0(t)S_t^0+\delta(t)S_t$ et sa dynamique est

$$\begin{aligned} V_t &= V_0+\int_0^t\delta^0(u)\ \mathrm{d}S_u^0+\delta(u)(\mathrm{d}S_u+qS_u\ \mathrm{d}u) \\ &= V_0+\int_0^t rV_u\ \mathrm{d}u+\int_0^t\delta(u)(\mathrm{d}S_u+(q-r)S_u\ \mathrm{d}u). \end{aligned}$$

Théorème 3.4. *Soit h une fonction mesurable pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t,x)$ sur $]0,T[\times\mathbb{R}_+^*$*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2x^2v_{xx}(t,x)+(r-q)xv_x(t,x)+v_t(t,x)-rv(t,x)=0 \\ v(T,x)=h(x) \end{cases}$$

Alors le flux $h(S_T)$ est duplicable par un portefeuille autofinançant, dont la valeur à la date t est $v(t,S_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta(t,S_t)=v_x(t,S_t)$.

Théorème 3.5. *La fonction prix d'un call de maturité T et de strike K sur un titre versant un dividende au taux continu q est donné par*

$$\begin{aligned} C(t,x,T,K) = {} & xe^{-q(T-t)}\Phi\left(d_1(T-t,xe^{(r-q)(T-t)},K)\right) \\ & -Ke^{-r(T-t)}\Phi\left(d_2(T-t,xe^{(r-q)(T-t)},K)\right) \end{aligned}$$

De plus cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta(t) \quad = \quad e^{-q(T-t)}\Phi\left(d_1(T-t,xe^{(r-q)(T-t)},K)\right)$$

parts de titre S.

On peut aussi valoriser des options binaires, *i.e.* des contrats dont le flux en T est de la forme

- $\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}$ pour les BinC ;
- $\mathbb{1}_{\{S_T<K\}}$ pour les BinP

Théorème 3.6. *On a*

$$\begin{aligned} BinC(0,x,T,K) &= -\partial_KC(0,x,T,K) \\ BinP(0,x,T,K) &= \partial_KP(0,x,T,K) \end{aligned}$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned} BinC(0,x,T,K) &= \mathbb{E}[e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}] \\ &= -\mathbb{E}[e^{-rT}\partial_K(S_T-K)^+] \\ &= -\partial_K\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T-K)^+] \\ &= \partial_KC(0,x,T,K). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.7. *On note $\nu=r-q$ le cout de portage*

(i) Symétrie call-put on a

$$C(t,xe^{-\nu(T-t)},T,K) \quad = \quad P(t,Ke^{-\nu(T-t)},T,x)\ ;$$

(ii) Homogénéité, pour tout $\lambda>0$,

$$C(t,\lambda x,T,\lambda K) \quad = \quad \lambda C(t,x,T,K).$$

3.6 Options barrière

On a par exemple un *Down-In Call* (DIC) donne le droit à son détenteur d'acheter le titre en T au prix K (*call*) et son droit est activé seulement si le titre descend (*In*) en dessous d'une barrière basse D (*Down*) pendant la durée de vie du contrat. Son exercice revient à recevoir un flux égal à $(S_T-K)^+\mathbb{1}_{\{\tau_D\leq T\}}$ où $\tau_D=\inf\{t\geq0:S_t\leq D\}$.

En combinant up/down, in/out, call/put on a huit variantes possibles.

Une relation claire d'AOA :

$$DOC_t+DIC_t \quad = \quad C_t.$$

Une autre manière de classer les options barrières consiste à regarder leur payoff à la barrière.

— Si celui-ci est nul ce sont des options dites regular. C'est par exemple le cas pour des DOC/DIC avec $K \geq D$.
— Les autres sont dites reverse et sont beaucoup plus dures à couvrir.

On peut calculer explicitement les prix à l'aide de $\gamma = 1 - \frac{2\nu}{\sigma^2}$.

Théorème 3.8 (DIC regular dans le cas $r = q$). *Si $x \leq D$ l'option est immédiatement activée et se transforme en call :*

$$DIC(t,x,T,K,D) \quad = \quad C(t,x,T,K).$$

Sinon on a

$$\begin{aligned} DIC(t,x,T,K,D) &= \frac{K}{D}P(t,x,T,\frac{D^2}{K}) \\ &= C(t,D,T,\frac{Kx}{D}). \end{aligned}$$

On adopte donc une couverture semi-statique :
— tant que $S_u < D$, on achète $\frac{K}{D}$ puts de caractéristique $(T, \frac{D^2}{K})$,
— à l'activation on achète un call de caractéristique (T, K).

En effet à $t = \tau_D$ je vends $\frac{K}{D}$ puts achetés en $t = 0$,

$$\begin{aligned} VL &= \frac{K}{D}P(\tau_d, S_{\tau_D} = D, T, \frac{D^2}{K}) \\ &= C(\tau_D, D, T, K)\ , \end{aligned}$$

la condition d'autofinancement est satisfaite.

Regardons le prix de ces options dans le cas général :
— si $x \leq D$, activation immédiate et le DIC est équivalent à un *call* ;
— si $x > D$, la valorisation va passer par celle des BinDIC, de *payoff* $\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mathbb{1}_{\{\tau_D<T\}}$. En effet $\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mathbb{1}_{\{\tau_D<T\}} = -\partial_K\left((S_T-K)^+\mathbb{1}_{\{\tau_D<T\}}\right)$.

Proposition 3.9. *On a par AOA et avec la relation précédente*

$$BinDIC(0,x,T,K,D) \quad = \quad -\partial_K DIC(0,x,T,K,D).$$

Lemme 3.10. *Soit un titre S suivant une dynamique BS, on a S^γ est un mouvement brownien géométrique sans drift.*

Et par conséquent S^γ a un cout de portage nul.

Démonstration. On a $S_T = S_0 \exp\left(\left((r-q) - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T\right)$, d'où

$$S_T^p = S_0 \exp\left(\left((r-q)p - \frac{1}{2}p\sigma^2\right)T + p\sigma W_T\right)$$

On cherche p t.q. $(r-q)p - \frac{1}{2}p\sigma^2 = -\frac{1}{2}p^2\sigma^2$, et γ convient. □

Théorème 3.11 (DIC *regular*, $x > D$). *On a les fonctions de prix des BinDIC et DIC :*

$$\begin{aligned} BinDIC(t,x,T,K,D) &= \left(\frac{x}{D}\right)^\gamma BinC(t,D,T,\frac{Kx}{D})\ ; \\ DIC(t,x,T,K,D) &= \left(\frac{x}{D}\right)^{\gamma-1} C(t,D,T,\frac{Kx}{D}). \end{aligned}$$

Démonstration. On va calculer le prix d'un BinDIC,

$$\begin{aligned} BinDIC &= \mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S_T>K\}}\mathbb{1}_{\{\tau_D<T\}}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{1}_{\{S_T^\gamma>K^\gamma\}}\mathbb{1}_{\{\inf_t S_t^\gamma \leq D^\gamma\}}\right] \\ &= BinDIC(S_0^\gamma, \sigma\gamma, D^\gamma, K^\gamma) \\ &\qquad \text{sans cout de portage} \\ &= -\partial_k DIC(S_0^\gamma, \sigma\gamma, D^\gamma, k)|_{k=K^\gamma} \\ &= -\partial_k C(D^\gamma, T, k\frac{S_0^\gamma}{D^\gamma})|_{k=K^\gamma} \\ &= \frac{S_0^\gamma}{D^\gamma} BinC(D^\gamma, T, K^\gamma\frac{S_0^\gamma}{D^\gamma}) \\ &= \frac{S_0^\gamma}{D^\gamma}\mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{1}_{\left\{D^\gamma \geq K^\gamma \frac{S_0^\gamma}{D^\gamma}\right\}}\right] \\ &= \frac{S_0^\gamma}{D^\gamma}\mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{1}_{\left\{D \geq K\frac{S_0}{D}\right\}}\right]. \end{aligned}$$

□

4 Couverture des risques : la cas général multi sous-jacents dans un marché mono-devise

4.1 Modélisation du marché

On fait l'hypothèse d'un marché d'Itô, *i.e.* $(\hat{W}^1, \ldots, \hat{W}^k)$ est un k m.b. $\perp\!\!\!\perp$ décrivant entièrement l'évolution de l'économie/du marché. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité historiques (scénarios réels). La filtration $\mathcal{F}_t$ est la filtration ambiante des m.b. elle traduit l'information de marché. On fait aussi l'hypothèse d'un marché dans friction.

Les actifs négociables sur le marché sont :
— Un actif sans risque qui rémunère les liquidités au taux $(r_t,\ t \geq 0)$, où r_t est un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté. Donc

$$\frac{\mathrm{d}S_t^0}{S_t^0} = r_t\,\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad S_t^0 = e^{\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}.$$

— Des actifs risqués au nombre de d,

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \quad = \quad \mu_t^i\,\mathrm{d}t \ + \ \sum_{j=1}^k \sigma_j^i(t)\,\mathrm{d}\hat{W}_t^j\ ,$$

avec $i \in [\![1, d]\!]$.

Le lecteur peut se demander quel est le lien avec la volatilité de S^i et les corrélations avec S^j. On note le vecteur de volatilité

$$\sigma^i(t) \quad = \quad \left(\sigma_1^i(t), \ldots, \sigma_k^i(t)\right)\ ,$$

et la volatilité de S^i,

$$|\sigma^i(t)| \quad = \quad \sqrt{\sum_j |\sigma^i_j|^2}.$$

On pose

$$B^i_t \quad := \quad \int_0^t \sum_j \frac{\sigma^i_j(s)}{|\sigma^i(s)|}\,\mathrm{d}\hat{W}^j_s\,,$$

then $\frac{\mathrm{d}S^i_t}{S^i_t} = \mu^i_t\,\mathrm{d}t \;+\; |\sigma^i(t)|\,\mathrm{d}B^i_t$. B^i est une intégrale stochastique. C'est aussi une martingale (locale), et,

$$\langle B^i\rangle_t \quad = \quad \int_0^t \sum_{j=1}^k \left|\frac{\sigma^i_j(s)}{|\sigma^i(s)|}\right|^2 \mathrm{d}s \;=\; t.$$

Donc d'après le théorème de Levy de caractérisation du mouvement brownien, B^i est un m.b.

On a aussi la corrélation :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cor}\left(\frac{\mathrm{d}S^i_t}{S^i_t},\frac{\mathrm{d}S^j_t}{S^j_t}\right) \quad &\triangleq \quad \frac{\langle \mathrm{d}B^i_t, \mathrm{d}B^j_t\rangle}{\mathrm{d}t} \\
&= \quad \frac{\langle \frac{\sigma^i(t)}{|\sigma^i(t)|}\,\mathrm{d}\hat{W}_t, \frac{\sigma^j(t)}{|\sigma^j(t)|}\,\mathrm{d}\hat{W}_t\rangle}{\mathrm{d}t} \\
&= \quad \frac{\sigma^i(t)\cdot\sigma^j(t)}{|\sigma^i(t)||\sigma^j(t)|}
\end{aligned}$$

4.2 Portefeuille autofinançant

Le vecteur d'allocation donne le nombre d'actifs en portefeuille à chaque date t

$$\delta_t \quad = \quad (\delta^0_t, \delta^1_t, \ldots, \delta^d_t).$$

La valeur liquidative du portefeuille est donc

$$V_t \quad = \quad \sum_{i=0}^d \delta^i_t S^i_t\,,$$

avec $\delta^i_t S^i_t$ le montant en \$ investi en S^i. De plus l'hypothèse d'autofinancement nous donne

$$\mathrm{d}V_t \quad = \quad \sum_{i=0}^d \delta^i_t\,\mathrm{d}S^i_t.$$

Or $\mathrm{d}S^0_t = S^0_t r_t\,\mathrm{d}t$, on peut donc mettre le cash de côté en écrivant,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t \quad &= \quad \sum_{i=1}^d \delta^i_t\,\mathrm{d}S^i_t \;+\; r_t\left(V_t - \sum_{i=1}^d \delta^i_t S^i_t\right)\mathrm{d}t \\
&= \quad r_t V_t\,\mathrm{d}t \;+\; \sum_{i=1}^d \delta^i_t\left(\mathrm{d}S^i_t - r_t S^i_t\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

Avec les formules d'Itô on a aussi

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t\right) \quad &= \quad e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}\left(\mathrm{d}V_t - r_t V_t\,\mathrm{d}t\right)\;; \\
\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}S^i_t\right) \quad &= \quad e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}\left(\mathrm{d}S^i_t - r_t S^i_t\,\mathrm{d}t\right).
\end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t\right) \quad = \quad \sum_{i=1}^d \delta^i_t\,\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}S^i_t\right).$$

On peut aussi écrire vectoriellement

$$\mathrm{d}V_t \quad = \quad r_t V_t\,\mathrm{d}t \;+\; (\delta S)_t\cdot\Big((\mu_t - r_t\mathbf{1})\,\mathrm{d}t + \sigma_t\,\mathrm{d}\hat{W}_t\Big).$$

Exemple 4.1. On souhaite couvrir $\int_0^T |\sigma^S_t|^2\,\mathrm{d}t$, avec $r_t = 0$, $\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu_t\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma^S_t\,\mathrm{d}\hat{W}_t$, et $\sigma^S_t = (\ldots)$.

La volatilité apparaît quand on écrit

$$\mathrm{d}\ln S_t \quad = \quad \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \;-\; \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\langle S\rangle_t}{S^2_t}\,,$$

où $\mathrm{d}\langle S\rangle_t = |\sigma^S_t|^2 S^2_t\,\mathrm{d}t$. On a donc

$$\frac{1}{2}\int_0^T |\sigma^S_t|^2\,\mathrm{d}t \quad = \quad \int_0^T \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \;-\; \ln\frac{S_T}{S_0}.$$

Le membre de gauche est couvert dynamiquement avec $\delta_t = \frac{1}{S_t}$ et le membre de droite se réplique statiquement avec la formule de Carr–Madan.

4.3 Absence d'opportunité d'arbitrage

On fait l'hypothèse qu'il y a AOA entre les portefeuilles admissibles.

Théorème 4.1. *(i) Un portefeuille admissible sans risque a nécessairement un rendement r_t.*

(ii) Il existe un vecteur aléatoire λ_t de dimension k ($= \dim W$) t.q.

$$\mu_t \quad = \quad r_t\mathbf{1} \;+\; \sigma_t\lambda_t.$$

On appelle λ_t la prime de risque.

On réécrit donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V_t \quad &= \quad r_t V_t\,\mathrm{d}t \;+\; (\delta S)_t\cdot\sigma_t(\underbrace{\mathrm{d}\hat{W}_t + \lambda_t\,\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{d}W_t})\;; \\
\mathrm{d}\left(e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t\right) \quad &= \quad e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}(\delta S)_t\cdot\sigma_t(\underbrace{\mathrm{d}\hat{W}_t + \lambda_t\,\mathrm{d}t}_{=:\,\mathrm{d}W_t}).
\end{aligned}$$

On a donc $W_t = \hat{W}_t + \int_0^t \lambda_s\,\mathrm{d}s$ et $\frac{\mathrm{d}S^i_t}{S^i_t} = r_r\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma^i_t\,\mathrm{d}W_t$. On se propose donc un changement de probabilité

$$\mathbb{Q}^\lambda{}_{|\mathcal{F}_t} \quad = \quad \underbrace{e^{-\int_0^t \lambda_s\,\mathrm{d}\hat{W}_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\lambda_s|^2\,\mathrm{d}s}}_{=:\,L^\lambda_t}\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_t}.$$

On a donc pour tout $\psi\in\mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\lambda}[\psi] \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L^\lambda_t\psi].$$

Et par conséquent grâce au théorème de Girsanov :

— $e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t$ est une intégrale stochastique en $\mathrm{d}W$.

— $\hat{W}$ est une $\mathbb{P}$-m.b.
— W est une $\mathbb{Q}^\lambda$-m.b.

Corollaire 4.1.1. *Si l'actualisation de V_t est une $\mathbb{Q}^\lambda$ martingale, alors*

$$e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\lambda}\left[e^{-\int_0^T r_s\,\mathrm{d}s}V_T\,|\mathcal{F}_t\right],$$

et si V réplique un flux ψ_T en T, alors

$$e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\lambda}\left[e^{-\int_0^T r_s\,\mathrm{d}s}\psi_T\,|\mathcal{F}_t\right],$$

On appelle $\mathbb{Q}^\lambda$ la probabilité de risque neutre. Et comme on a

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \quad = \quad r_t\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma_t^i\,\mathrm{d}W_t^i\,,$$

on en déduit que $e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}S_t^i$ est une $\mathbb{Q}^\lambda$ martingale. En effet pour les portefeuilles de réplication, la règle de pricing $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\lambda}[\dots]$ en dépend pas de λ.

4.4 Marché complet

Théorème 4.2. *Si σ est inversible ($k=d$), alors λ est unique. Si de plus λ est borné et si $\mathbb{E}\left[e^{-c\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}\right]<\infty$, $\forall c$, alors pour tout flux $\psi_T\in\mathcal{F}_T$ de carré intégrable sous $\mathbb{P}$, il existe une stratégie admissible de couverture $(\delta_t)_t$ et*

$$V_t \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s}\psi_t\middle|\,\mathcal{F}_t\right].$$

Proposition 4.3. *Les portefeuilles admissibles avec actualisation sont des $\mathbb{Q}$ martingales.*

En fait dans l'univers on a $\mathbb{P}$ la probabilité historique et $\mathbb{Q}$ le noyau de pricing.

4.5 Changement de numéraire

Définition 4.1 (Numéraire)**.** Référence monétaire en \$ dont le niveau X évolue comme une processus d'Itô.

Dans un X-marché, si S en \$ alors son X prix est $\frac{S}{X}$.

On fait l'hypothèse que le numéraire évolue de la façon suivante

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} \quad = \quad \mu_t^X\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma_t^X\,\mathrm{d}\hat{W}_t.$$

Proposition 4.4. *(i) La notion d'autofinancement est invariante par changement de numéraire,*

$$\mathrm{d}\left(\frac{V_t}{X_t}\right) \quad = \quad (\delta_t^0\dots\delta_t^d)\,\mathrm{d}\left(\frac{S_t}{X_t}\right),$$

où $S_t=(S_t^0\dots S_t^d)^{\mathrm{T}}$.

(ii) S'il existe un arbitrage dans un numéraire, alors il existe aussi dans d'autres numéraires.

Lemme 4.5. *Soit U,V deux processus d'Itô réels, on a les règles de calcul*

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(U_tV_t) \quad &= \quad U_t\,\mathrm{d}V_t \;+\; V_t\,\mathrm{d}U_t \;+\; \mathrm{d}\langle U,V\rangle_t\;;\\
\frac{\mathrm{d}(U_tV_t)}{U_tV_t} \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}U_t}{U_t} \;+\; \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} \;+\; \left\langle\frac{\mathrm{d}U}{U},\frac{\mathrm{d}V}{V}\right\rangle_t\;;\\
\frac{\mathrm{d}(\frac{U_t}{V_t})}{\frac{U_t}{V_t}} \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}U_t}{U_t} \;-\; \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} \;-\; \left\langle\frac{\mathrm{d}V}{V},\frac{\mathrm{d}U}{U}-\frac{\mathrm{d}V}{V}\right\rangle_t.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.5.1. *Le vecteur de volatilité de $S^X:=\frac{S}{X}$ est égal au vecteur de volatilité de S moins celui de X.*

Démonstration. On a $\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=\sigma_t^S\,\mathrm{d}\hat{W}_t\;+\;\cdot\,\mathrm{d}t$ et $\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t}=\sigma_t^X\,\mathrm{d}\hat{W}_t\;+\;\cdot\,\mathrm{d}t$. D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S_t^X}{S_t^X} \quad &= \quad \frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \;-\; \frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} \;+\; \cdot\,\mathrm{d}t\\
&= \quad (\sigma_t^S-\sigma_t^X)\,\mathrm{d}\hat{W}_t \;-\; \cdot\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

On pose maintenant $\tilde{\mathbb{Q}}_{|\mathcal{F}_t}:=H_t\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t}$, où H_t est une martingale sous $\mathbb{Q}$, $H_0=1$.

Proposition 4.6. *(i) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|Z|]<\infty\Leftrightarrow\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\left|\frac{Z}{H_t}\right|\right]<\infty$.*

(ii) Bayes : $\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[\frac{Z}{H_t}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]=\frac{1}{H_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z|\mathcal{F}_t]$.

(iii) M_t est une $\mathbb{Q}$ martingale $\Leftrightarrow\frac{M_t}{H_t}$ est une $\tilde{\mathbb{Q}}$ martingale.

Théorème 4.7. *(i) Si on a*

$$\begin{aligned}
L_t^X \quad &= \quad \frac{e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}X_t}{X_0}\\
&= \quad e^{\int_0^t\sigma_s^X\,\mathrm{d}W_s-\frac{1}{2}\int_0^t|\sigma_s^X|^2\,\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

une $\mathbb{Q}$ martingale >0 et $L_0^X=1$, alors $W_t^X:=W_t-\int_0^t\left(\sigma_s^X\right)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{d}s$ est un $\mathbb{Q}^X$-m.b. où $\mathbb{Q}^X{}_{|\mathcal{F}_t}=L_t^X\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_t}$.

(ii) Si S a une volatilité σ^S et $\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t}=r_t\,\mathrm{d}t\;+\;\sigma_t^S\,\mathrm{d}W_t$, alors

$$\frac{\mathrm{d}S_t^X}{S_t^X}=\left(\sigma_t^S-\sigma_t^X\right)\,\mathrm{d}W_t\;(+O\,\mathrm{d}t)\,,$$

et S^X est une $\mathbb{Q}^X$ martingale.

Démonstration. □

Corollaire 4.7.1. *On suppose que V couvre ψ_T,*

$$\begin{aligned}
e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}V_t \quad &= \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_s\,\mathrm{d}s}\psi_T\middle|\,\mathcal{F}_t\right]\\
&= \quad \frac{e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}X_t}{X_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{e^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}\psi_T}{e^{-\int_0^T r_s\mathrm{d}s}\frac{X_T}{X_0}}\middle|\,\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow V_t^X=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X}[\psi_T^X|\mathcal{F}_t]$, avec $L_t^X=\frac{e^{-\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}X_t}{X_0}$.

4.6 Applications

4.6.1 Formule de Black

Théorème 4.8.

4.6.2 Portefeuille Markovien

Théorème 4.9 (Forme générique)**.** *On suppose que les produits qui permettent de se couvrir suivent la dynamique*

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \;=\; r_t\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma^i(t,S_t)\,\mathrm{d}W_t$$

sous $\mathbb{Q}$. Le cash a un taux déterministe $(r_t)_t$, et on a un flux en T, $\psi(S_T)$ suffisament intégrable. On suppose aussi que $\dim(W)=\dim(s)$ *et*

$$\sigma(t,S_t) \;=\; \begin{pmatrix} \sigma^1(t,S_t) \\ \vdots \\ \sigma^d(t,S_t) \end{pmatrix}$$

est inversible. Alors

(i) Il existe une portefeuille de couverture.

(ii) $V_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s}\psi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$.

(iii) On a une EDP de pricing pour $V_t = v(t,S_t)$,

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(S^iS^j\sigma^i(t,S)\cdot\sigma^j(t,S)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial S^i\partial S^j} \qquad (4.1)$$
$$+\;\partial_t v \;+\; \sum_i r_t S^i \partial_{S^i} v \;-\; r_t v \;=\; 0$$

(iv) La couverture se fait en achetant

$$\delta_t \;=\; \partial_S v(t,S_t).$$

Exemple 4.2 (Taux forwards)**.** Les taux forwards peuvent s'écrire comme une somme de facteurs stochastiques gaussiens notés (X_t^i) pris en une fonction déterministe. On peut donc prouver que les prix ZC est une exponentielle affine des (x_t^i). Ce sont des exemples où les assets de couverture sont de la forme

$$S_t^i \;=\; H^i(t,X_t)\,,$$

Quelle est alors l'EDP et la couverture ?

On suppose $r_t = r(t,X_t)$, H^i smooth. On a forcément

$$\partial_t H^i \;+\; \mathcal{L}^X H^i \;-\; r(t,x) \;=\; 0\,,$$

puisque les S^i actualisés sont des martingales. Où $\mathcal{L}^X$ correspond à l'opération que l'on retrouve dans (4.1).

Avec un flux $\psi(S_T) = \psi^X(X_T)$ et une dynamique

$$\mathrm{d}X_t \;=\; \mu^X(t,X_t)\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma^X(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t\,,$$

on a la vol de S^i qui est égale à [4]

$$\frac{\partial_X H^i(t,X_t)}{H^i(t,X_t)}\sigma^X(t,X_t).$$

Si on suppose maintenant que $\dim S = \dim W$, et que la matrice de vol est inversible, on a

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s}\psi(S_T)\middle|\,\mathcal{F}_t\right] \\ &= u(t,X_t) \end{aligned}$$

$$\partial_t u \;+\; \mathcal{L}^X u(t,x) \;-\; r(t,x)u(t,x) \;=\; 0.$$

Mais attention la couverture n'est pas $\partial_X u(t,X_t)$, en effet on écrit d'une part la formule d'Itô

$$\mathrm{d}u(t,X_t) \;=\; \partial_X u(t,X_t)\,\mathrm{d}X_t \;+\; \cdot\,\mathrm{d}t$$

et de l'autre la condition d'autofinancement

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t,X_t) &= \delta_t\,\mathrm{d}S_t \;+\; \cdot\,\mathrm{d}t \\ &= \partial_x H(t,X_t)\delta_t\,\mathrm{d}X_t \;+\; \cdot\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et donc en égalisant la partie $\mathrm{d}X_t$,

$$\delta_t \;=\; \left(\partial_x H(t,X_t)\right)^{-1}\partial_X u(t,X_t).$$

4.7 Volatilité à la Dupire

4.7.1 Volatilité locale

On se place dans le cadre

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \;=\; (r-q)\,\mathrm{d}t \;+\; \sigma(t,S_t)\,\mathrm{d}W_t\,,$$

avec r déterministe, et q le taux de dividende déterministe. On suppose aussi que $0 < \underline{\sigma} \le \sigma \le \bar{\sigma} < \infty$, et σ régulière.

Théorème 4.10 (EDP de valorisation en variable backward (t,S))**.** *L'EDP de pricing en (t,S) est donnée par*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,S) \;+\; (r-q)S\partial_S u(t,S) \\ \;+\; \frac{1}{2}S^2\sigma^2(t,S)\partial_S^2 u(t,S) \;-\; ru(t,S) \;=\; 0 \\ u(T,S) \;=\; (S-K)^+. \end{cases}$$

C'est celle qui donne le prix RN du call de strike K et de maturité T :

$$u(t,S) \;=\; \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+\middle|\,S_t = S\right]$$

4. En appliquant la formule d'Itô on trouve

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \;=\; \frac{\partial_X H^i(t,X_t)}{H^i(t,X_t)}\sigma^X(t,X_t)\,\mathrm{d}W_t \;+\; \cdot\,\mathrm{d}t.$$

4.7.2 EDP en variables forwards

Théorème 4.11. *On a l'EDP en (T,K) à $(t=0,S_0)$ fixé, où $u^{(T,K)}(0,S_0)=v^{(0,S_0)}(T,K)$ est solution de*

$$\begin{cases} \partial_T v \ + \ (r-q)K\partial_K v \\ -\ \frac{1}{2}K^2\sigma^2(T,K)\partial_K^2 v \ + \ qv \ = \ 0 \\ v(0,K) \ = \ (S_0-K)^+. \end{cases}$$

Démonstration. □

4.7.3 Volatilité à la Dupire

La question est de savoir s'il existe une vol locale capable de reproduire les prix des call/puts côtés, *i.e.* t.q.

$$C^M(T,K,\mathcal{F}_0) \ = \ u^{(T,K)}(0,S_0)(\sigma^{LV}), \qquad \forall (T,K)$$

Théorème 4.12. *Oui une telle volatilité existe, c'est la volatilité Dupire :*

$$\left(\sigma^{LV,D}(T,K)\right)^2 \ = \ 2\frac{\partial_T C^M + (r-q)K\partial_K C^M + qC^M}{K^2\partial_K^2 C^M(T,K)}$$

4.7.4 Connexion avec la vol implicite

4.7.5 Projection markovienne

On prend $r=q=0$ et

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \ = \ \sqrt{V_t}\,\mathrm{d}W_t\,,$$

où V_t est une variance stochastique.

On cherche à savoir s'il existe un σ^{LV} t.q. le prix call avec cette vol locale coïncide avec le prix du call en vol stochastique.

Théorème 4.13 (Gyongy)**.** *Si $\left(\sigma^{LV}\right)^2(t,S)=\mathbb{E}[V_t|S_t=S]$ alors les prix vanilles coïncident dans les deux modèles.*

Remarque. Il est donc impossible de distinguer sur les prix de call un modele à vol locale et à vol stochastique. Et de plus des modèles à vol stochastique ayant même projection markovienne ne sont pas identifiables sur les produits vanilles.

Démonstration. □

4.8 Robustesse de la couverture BS

On suppose que le marché évolue avec une vol aléatoire σ_t,

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \ = \ \sigma_t\,\mathrm{d}W_t \qquad (r=q=0).$$

De plus on crois à un modèle à vol locale $\sigma^{LV}(t,S)$ et l'on couvre avec cela. Quel est alors l'impact sur ma tracking error ?

On rappelle l'EDP de pricing

$$\begin{cases} \partial_t u(t,S) \ + \ \frac{1}{2}\sigma^2(t,S)S^2\partial_S^2 u(t,S) \ = \ 0 \\ u(T,S) \ = \ (S-K)^+. \end{cases}$$

Et l'on couvre avec $\delta_t=\partial_S u(t,S_t)$.

La valeur liquidative de portefeuille est

$$V_T \ = \ V_0 \ + \ \int_0^T \partial_S u(s,S_s)\,\mathrm{d}S_s\,,$$

et d'autre part avec la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} (S_T-K)^+ \ &= \ u(T,S_T) \\ &= \ u(0,S_0) \ + \ \int_0^T \left(\partial_t u + \frac{1}{2}\partial_S^2 u S_t^2\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t \\ &\qquad + \ \int_0^T \partial_S u\,\mathrm{d}S_t \\ &= \ \underbrace{u(0,S_0) \ + \ \int_0^T \partial_S u\,\mathrm{d}S_t}_{=V_T} \ + \\ &\qquad + \ \int_0^T \frac{1}{2}\partial_S^2 u S_t^2\left(\sigma_t^2-\sigma^2(t,S_t)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Donc la tracking error ε vaut

$$\begin{aligned} \varepsilon \ &\triangleq \ (S_T-K)^+ \ - \ V_T \\ &= \ \int_0^T \frac{1}{2}\partial_S^2 u(t,S_t)S_t^2\left(\sigma_t^2-\sigma^2(t,S_t)\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En particulier si la vol locale est la projection markovienne de la vol du marché, *i.e.* $\mathbb{E}\left[\sigma_t^2\middle|\,S_t\right]=\sigma^2(t,S_t)$, alors sous $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\varepsilon] \ = \ 0.$$

Nouvelle représentation des volatilités implicites On pose le prix donné par le marché C_0,

$$\begin{aligned} C_0(T,K) \ &= \ C^{BS}\left(0,S_0,T,K,\sigma_0^I(T,K)\right) \\ &= \ u(0,S_0)\,, \end{aligned}$$

and the EDP is

$$\partial_t u(t,S_t) \ + \ \frac{1}{2}\left(\sigma^I\right)^2(t,S_t)S^2\partial_S^2 u(t,S_t) \ = \ 0.$$

On peut alors facilement montrer que

$$\mathbb{E}\left[(S_T-K)^+\right] \ - \ \mathbb{E}\left[V_t\right] \ = \\ \mathbb{E}\left[\int_0^T \tfrac{1}{2}\Gamma^{BS}\left(t,S_t,\sigma_0^I(T,K)\right)S_t^2\left(\sigma_t^2-\left(\sigma_0^I\right)^2(t,S_t)\right)\mathrm{d}t\right].$$

Et on a alors

$$\left(\sigma_0^I(T,K)\right)^2 \ = \ \frac{\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma^{BS}\left(t,S_t,\sigma_0^I(T,K)\right)S_t^2\sigma_t^2\,\mathrm{d}t\right]}{\mathbb{E}\left[\int_0^T \Gamma^{BS}\left(t,S_t,\sigma_0^I(T,K)\right)S_t^2\,\mathrm{d}t\right]}\,,$$

ce qui peut s'interpréter comme la moyenne des σ_t^2 futurs.

Deuxième partie

5 Les taux d'intérêts

5.1 Éléments de calcul actuariel

5.1.1 Taux et obligations

Un zéro-coupon $B(t,T)$ est le prix en t de 1 euro payé en T. Ainsi

$$B(t,T) \quad = \quad e^{-(T-t)R(t,T-t)}.$$

Le taux court est le taux de placement pour un temps très petit, $\frac{\mathrm{d}S_t^0}{S_t^0} = r_t\,\mathrm{d}t$, $S_0^0 = 1$, d'où

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s}.$$

Un taux de maturité θ, noté $R(t,\theta)$ est caractérisé par le placement de 1 euro pour la période $[t, t+\theta]$, rapporte

$$e^{\theta R(t,\theta)} \quad = \quad \frac{1}{B(t,t+\theta)}.$$

En revanche si la maturité $\theta < 1$, on préféra utiliser le taux linéaire

$$\frac{1}{B(t,t+\theta)} \quad = \quad 1 + \theta L(t,\theta).$$

L'AOA nous donne directement le prix d'une obligation qui délivre des coupons C_i et un nominal N,

$$O_t \quad = \quad \sum_{t_i \geq t} C_i B(t,t_i) \; + \; NB(t,t_N).$$

5.1.2 Opérations à terme

Un zéro-coupon forward est le prix fixé par contrat en t, que l'on payera en T pour 1 euro payé en $T+\theta$. Par AOA,

$$B_t(T,T+\theta) \quad = \quad \frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}.$$

Le taux forward de maturité θ est le taux de cette opération $R_t(T,\theta)$,

$$B_t(T,T+\theta) \quad = \quad e^{-\theta R_t(T,T+\theta)}.$$

5.2 Les zéro-coupon comme actifs – Conséquences sur les taux

5.2.1 Le modèle

On se place dans un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$. Le modèle est donné par

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}B(t,T)}{B(t,T)} \quad &= \quad r_t\,\mathrm{d}t \; + \; \Gamma(t,T)\cdot\left(\mathrm{d}\hat{W}_t + \lambda_t\,\mathrm{d}t\right) \; ; \\ B(T,T) \quad &= \quad 1\,, \end{aligned}$$

où $\hat{W}_t$ est un d m.b. et λ_t est ce que l'on appelle le vecteur de prime de risque.

5.2.2 Équation structurelle des taux

Le prix en t d'un ZC est donné par

$$\begin{aligned} B(t,T) \quad = \quad & B(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s\,\mathrm{d}s \; + \; \int_0^t \Gamma(s,T)\cdot\mathrm{d}\hat{W}_s \right. \\ & \left. + \int_0^t |\Gamma(s,T)|^2\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

En écrivant la même formule pour $B(0,t)$, on peut éliminer le taux court, ce qui nous donne la relation

$$\begin{aligned} B(t,T) \quad = \quad & \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left(\int_0^t (\Gamma(s,T) - \Gamma(s,t))\cdot\mathrm{d}\hat{W}_s \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}\int_0^t \left(|\Gamma(s,T)|^2 - |\Gamma(s,t)|^2\right)\,\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

On note $\partial_T\Gamma(t,T) = \gamma(t,T)$.

5.2.3 Équations intégrales des taux

La représentation des taux courts forward dans le futur est donnée par :

$$\begin{aligned} f(t,T) \quad = \quad & f(0,T) \; - \; \int_0^t \gamma(s,T)\,\mathrm{d}W_s \\ & + \int_0^t \gamma(s,T)\Gamma(s,T)^*\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

On a donc le taux court, avec la relation $r_t = f(t,t)$,

$$\begin{aligned} r_t \quad = \quad & f(0,t) \; - \; \int_0^t \gamma(s,y)\,\mathrm{d}W_s \\ & + \int_0^t \gamma(s,t)\Gamma(s,t)^*\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

La représentation des taux continus est donnée par :

$$\begin{aligned} R(t,\theta) \quad = \quad & R_0(t,\theta) \; - \; \int_0^t \frac{\Gamma(s,t+\theta) - \Gamma(s,t)}{\theta}\,\mathrm{d}W_s \\ & + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{|\Gamma(s,t+\theta)|^2 - |\Gamma(s,t)|^2}{\theta}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

5.2.4 Equations différentielles des taux

Le plus facile est d'étudier les taux spots forward, la dynamique de $f(t,T)$ est donnée par

$$\mathrm{d}f(t,T) \quad = \quad -\gamma(t,T)\,\mathrm{d}W_t \; + \; \gamma(t,T)\Gamma(t,T)^*\,\mathrm{d}s.$$

Soit $r(t,\theta) = f(t,t+\theta)$. Supposons $f(t,T)$ dérivable par rapport à T, avec dérivée bornée par un processus unif. intégrable.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}r(t,\theta) \quad = \quad & \partial_\theta r(t,\theta)\,\mathrm{d}t \; - \; \gamma(t,T)\,\mathrm{d}W_t \\ & + \gamma(t,T)\Gamma(t,T)^*\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Comme $\Gamma(t,t+0) = 0$, le taux court a une dynamique de la forme

$$\mathrm{d}r_t \quad = \quad \partial_\theta r(t,\theta)\,\mathrm{d}t \; - \; \gamma(t,T)\cdot\mathrm{d}W_t.$$

5.3 Construction de la courbe des taux

Il y a des méthodes d'interpolation pour construire les points manquants de la courbe de taux. On va voir ici une construction s'appuyant sur le modèle de Vasicek (1977).

Ici les ZC sont vus comme des produits dérivés, par la règle d'évaluation risque neutre on a

$$B(t,T) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(\int_t^T r_s \,\mathrm{d}s\right) \times 1 \middle| \mathcal{F}_t\right].$$

Le modèle est :

$$\mathrm{d}r_t \quad = \quad a(b-r_t)\,\mathrm{d}t \;-\; \sigma\,\mathrm{d}W_t\,,$$

de solution

$$r_t \quad = \quad r_0 e^{-at} \;+\; b(1-e^{-at}) \;-\; \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\,\mathrm{d}W_s.$$

On peut ensuite donner $R(t,\theta)$, voir feuille #1 d'exercices des taux. Mais on peut aussi trouver sa solution à l'aide d'une EDP, dont la solution est $\mathcal{B}(t,r,T)$, avec $\mathcal{B}(T,r,T) = 1$. On montre avec la formule d'Itô et la condition d'autofinancement que l'EDP s'écrit

$$\partial_t \mathcal{B} \;+\; \partial_r \mathcal{B}\,(a(b-r)) \;-\; \frac{1}{2}\partial_r^2 \mathcal{B}\sigma^2 \;-\; r\mathcal{B} \quad = \quad 0.$$

5.4 Évaluation forward

5.4.1 Évaluation forward sans modèle

On a clairement par AOA en notant $F_t(S_T,T)$ le contrat forward en t sur S de maturité T :

$$F_t(S_T,T) \quad = \quad \frac{S_t}{B(t,T)}.$$

D'où le prix forward,

$$F_t(X_T,T) \quad = \quad \frac{1}{B(t,T)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T r_s\,\mathrm{d}s\right) X_T \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

5.4.2 Probabilité forward neutre

Définition 5.1 (Probabilité forward neutre)**.** On définit $\mathbb{Q}^T$ la probabilité forward neutre t.q.

$$F_t(X_T,T) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[X_T|\mathcal{F}_t].$$

On a différentes manières de caractériser $\mathbb{Q}^T$:

(i) En calculant sa densité par rapport à la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbb{Q}^T}{\mathrm{d}\mathbb{Q}} \quad &= \quad \frac{\exp\left(-\int_0^T r_s\,\mathrm{d}s\right)}{B(0,T)} \\ &= \quad \exp\left(-\int_0^T (r_s - f(0,s))\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

(ii) En écrivant que sous la probabilité $\mathbb{Q}^T$, la dynamique des contrats forwards

$$\frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)} \quad = \quad B_t(T,T+\theta) \quad \text{est une martingale.}$$

(iii) $W_t^T := W_t - \int_0^t \Gamma(s,T)\,\mathrm{d}s$ doit être un $\mathbb{Q}^T$ mouvement brownien.

(iv) Le taux spot forward est une $\mathbb{Q}^T$ martingale,

$$\mathrm{d}f(t,T) \quad = \quad \gamma(t,T)\cdot \mathrm{d}W_t^T\,, \qquad f(T,T) \;=\; r_T.$$

On rappelle les formules de pricing sous différents numéraires, soit un payoff H_T et un numéraire N_T associé à une proba risque neutre $\mathbb{Q}^N$. Sous $\mathbb{Q}^N$, $\frac{H}{N}$ est une martingale locale et on a

$$\frac{H_t}{N_t} \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^N}\left[\frac{H_T}{N_T}\middle| \mathcal{F}_t\right].$$

5.4.3 Correction de convexité

Pour les future. A cause des appels de marge des Future Contracts, le prix en t d'un Future de payoff Φ_T à maturité est donné par

$$\mathrm{Fut}_t(T,\Phi) \quad = \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi_T|\mathcal{F}_t]$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque neutre. La correction de convexité est l'écart entre le prix du Future et le prix du Forward :

- — si les taux sont déterministes, il n'y a pas de différence ;
- — si les taux sont stochastiques, le prix forward est donné par

$$\begin{aligned}F_t(\Phi,T) \quad &= \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^T}[\Phi_T|\mathcal{F}_t] \\ &= \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^T (r_s - f(t,s))\,\mathrm{d}s\right)\Phi_T \middle| \mathcal{F}_t\right].\end{aligned}$$

5.4.4 Option sur ZC et Caplets

Option sur ZC. On considère un call de strike K et de maturité T_C, sur le ZC $B(t,T)$, $T \geq T_C$. Son prix à t est donné par

$$C_t(T_C,K,T) \quad = \quad B(t,T_C)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{T_C}}\left[(B(T_C,T)-K)^+\right].$$

Dans le cas où ces volatilités sont déterministes on peut utiliser la formule de black,

$$C_t(T_C,K,T) \quad = \quad B(t,T)\Phi(d_+) \;-\; KB(t,T_C)\Phi(d_-)\,,$$

avec

$$\begin{aligned}d_\pm \quad &= \quad \frac{\ln\frac{B(t,T)}{KB(t,T_C)}}{\Sigma_{t,T_C}\sqrt{T_C-t}} \;\pm\; \frac{1}{2}\Sigma_{t,T_C}\sqrt{T_C-t}\,, \\ |\Sigma_{t,T_C}|^2 \quad &= \quad \int_t^{T_C} |\Gamma(s,T)-\Gamma(s,T_C)|^2\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Au vue de formule la couverture est évidente.

Caplets. Un caplet de strike K et de maturité T est un produit dérivé qui garantit la possibilité d'emprunter en T_C au taux Euribor de maturité δ au niveau maximum de K. Le flux garanti est $\delta(L(T_C, \delta) - K)^+$ en $T_C + \delta$.

L'opération est équivalente à acheter en T_C une option de vente sur zéro-coupon de maturité T de strike $\frac{1}{1+\delta K}$, en nombre $1 + K$. C'est donc un Put sur un zéro-coupon.

5.5 Options sur obligations à coupons, Swaptions

5.5.1 Options sur obligations à coupons

Considérons un échéancier de flux aléatoires , caractérisé par :

— les dates de tombée des flux, qui sont désignées par :

$$0 < T_1 < \cdots < T_n := T$$

— le flux aléatoire F_i attendu à la date T_i.

La valeur financière en 0 de cet échéancier est donnée par la somme des flux futurs actualisés, soit :

$$V_0 \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} \hat{F}_i B(0, T_i)\,,$$

où $\hat{F}_i := \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^{T_i}}[F_i]$. On a alors une option d'achat sur obligation :

— L'échéance de l'option est T_C et son prix d'exercice K, le prix de l'obligation en T_C est noté O_{T_C}.

— L'obligation a une maturité $T_f > T_C$.

— Désignons par $\mathcal{E}$ l'évènement aléatoire : il y a exercice à la date T_C, *i.e.* $\mathcal{E} = \{O_{T_C} \geq K\}$.

La règle d'évaluation des flux aléatoires donne immédiatement le prix de cette option

$$\begin{aligned} \mathrm{Call}(t, T_C, K, T) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{d} B(0, T_i) C_i \mathbb{Q}^{T_i}(\mathcal{E}) \\ & - K B(0, T_C) \mathbb{Q}^{T_C}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

5.5.2 Les Swaptions

Rappel sur les Swap. Le taux de Swap forward (IRS) est donné par

$$\delta \mathrm{IRS}_t(T, T_f) \quad = \quad \frac{1 - B_t(T, T_f)}{\sum_{i=1}^{N} B_t(T, T_i)}.$$

Posons $\mathrm{Level}_t(T, T_f) := \delta \sum_{i=1}^{N} B_t(T, T_i)$. C'est un portefeuille de ZC qui peut-être utilisé comme numéraire. Sous la probabilité $\mathbb{Q}^{\mathrm{Level}}$, $\mathrm{IRS}_t(T, T_f)$ est une martingale.

Retour aux Swaption.