Finance haute fréquence

Antoine Falck
Djahiz Meliani

11 février 2018

Sommaire

Introduction

Ce rapport présente des applications directes au cours « Finance haute fréquence : outils probabilistes, modélisation statistique à travers les échelles et problèmes de trading » dispensé par M. Rosenbaum pour le Master 2 Probabilités et Finance de l'Université Pierre et Marie Curie.

Nous avons choisi ici dans un premier temps de s'intéresser à une minimisation moyenne variance (approche de Markovitz) pour un portefeuille contenant trente actions du CAC40. Ensuite nous verrons comment l'approche de Almgren Chriss nous indique une manière optimale de liquidité un portefeuille à un actif sous un certain critère.

Tous les calculs ont été fait avec le logiciel R.

1 Portfolio management – Approche de Markovitz

1.1 Le problème et les données

On décide d'investir dans les trente premières actions du CAC40 et dans un actif sans risque qui rémunère au taux r dont on parlera plus tard. La question est donc de trouver la répartition optimale de notre investissement dans ces 31 actifs au sens de la moyenne/variance.

La période sur laquelle on souhaite optimiser est de une semaine *i.e.* cinq jours, on a donc deux dates, $t = 0$ où l'on commence notre investissement et $T = \frac{5}{250}$ la fin de notre investissement.

Pour mener à bien notre optimisation on a besoin de données historiques sur toutes les actions en question dans le CAC40 à ce jour. On choisi d'extraire ces données de 2010-01-01 à 2017-12-31, ce qui nous permet à la fois d'avoir beaucoup de données (environ 1000 valeurs) et de respecter une certaine stationnarité. Les cotations que l'on va regarder sont la fermeture (le *close*) de chaque action, chaque jour.

On récupère les *tickers* sur le site Yahoo Finance [1], qui ne fourni que les trente premiers *tickers* du CAC40, on peut ensuite extraire les *close* de chaque action, toujours à partir de Yahoo Finance directement grâce à la commande en R :

```
get.hist.quote(instrument=ticker[i],
        start=start,
        end=end,
        quote="Close")
```

1.2 Les paramètres du problème

On a déjà parlé de certains paramètres comme la durée de notre investissement, qui est de cinq jours. Le début de notre investissement se fera sur les prix du dernier jour de cotation de l'année 2017, *i.e.* le 2017-12-29.

1. https://fr.finance.yahoo.com/quote/%5EFCHI/components?p=%5EFCHI

On a également besoin du taux sans risque r qui nous rémunère notre *cash* sur une semaine. Le taux Euribor[2] une semaine était à $r = -0.397\%$ c'est donc ce taux de référence que l'on va prendre pour nos calculs.

Pour fixer les idées on va supposer que l'on dispose de $v = 1$ euro à investir, la valeur de notre portefeuille à $t = 0$ sera donc $V_0(a_0, \mathbf{a}) = 1$. Pour quantifier le risque on utilise la volatilité de notre portefeuille notée σ, que l'on va fixer à 20%.

Pour récapituler

$$\left\{\begin{array}{lcl} T & = & \frac{5}{250} \\ r & = & -0.397\% \\ v & = & 1 \\ \sigma & = & 20\% \end{array}\right.$$

Le dernier paramètre que l'on se donne est inclus dans les données, c'est le vecteur des cotations à $t = 0$ que l'on note $\mathbf{p}_0$.

1.2.1 Espérance de rendement et matrice de covariance

On a les rendements $\mathbf{Y} = (y_1, \ldots, y_{30})^{\mathrm{T}}$ pour nos trente actifs sur une période de cinq jours, pour résoudre le problème posé on a besoin de l'espérance et la matrice de covariance de ce vecteur :

$$\boldsymbol{\mu} := \mathbb{E}[\mathbf{Y}] \; ; \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Omega} := \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y]. \tag{2}$$

Gardons en tête que l'on a accès aux rendements $(\mathbf{Y}_t)_{0 \leq t \leq n}$, où dans notre cas $n \approx 1000$ (période 2014-01-01 à 2017-12-31[3]). On peut alors simplement les estimer avec les moments empiriques

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_i \; ; \tag{3}$$

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n \triangleq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{Y}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_n)(\mathbf{Y}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}}_n)^{\mathrm{T}}. \tag{4}$$

1.2.2 Estimation grâce à la distribution de Marčenko–Pastur

En fait l'estimation de la matrice de covariance dans son ensemble est très bruité du fait de la dimension 30×30. On va donc utiliser la distribution de Marčenko–Pastur pour faire une meilleure estimation de cette matrice.

2. `https://www.emmi-benchmarks.eu/euribor-org/about-euribor.html`

3. Pour être précis $n = 1024$, sauf pour l'action de *LafargeHolcim Ltd* (`LHN.PA`) qui est la fusion de *Lafarge* et d'*Holcim* en juillet 2015. On a donc que 635 données.

Dans un premier temps on préfère travailler sur la matrice de corrélation (estimée), que l'on va noter $\hat{\mathbf{E}}$. Que l'on peut écrire sous la forme

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^{30} \lambda_i \mathbf{V}_i (\mathbf{V}_i)^{\mathrm{T}}, \tag{5}$$

où $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{30}$ sont les valeurs propres et $\mathbf{V}_i$ le vecteur propre associé.

Dans le cas d'une matrice de corrélation où $\mathbf{Y} \sim \mathcal{U}([0,1])$, les vecteur propres de cette matrice suivent la distribution de Marčenko–Pastur lorsque $n \to \infty$ et $N \to \infty$:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - x)(x - \lambda_-)}}{Qx} \mathbb{1}_{[\lambda_-, \lambda_+]}(x), \tag{6}$$

où $Q = \frac{N}{n}$ et $\lambda_\pm = (1 \pm \sqrt{Q})^2$. On va donc garder les vecteur propres supérieurs à λ_+ car ils contiennent effectivement de l'information, et remplacer les autres par la même valeur a pour garder la condition $\mathrm{Tr}(\mathbf{E}) = 30$.

La Figure 1 présente la position des valeurs propres excepté la première qui est de 15.5, on voit alors que l'on va garder $\lambda_1 = 15.5$ et $\lambda_2 = 1.68$ étant donné que $\lambda_+ = 1.26$ est supérieur à $\lambda_3 = 1.15$. On va donc prendre

$$\lambda_k^{\mathrm{clean}} = \frac{N - \lambda_1 - \lambda_2}{N - 2}, \qquad k \in [\![3, 40]\!] \tag{7}$$

$$= \frac{30 - 15.5 - 1.68}{30 - 2} = 0.46 \tag{8}$$

On obtient donc $\hat{\mathbf{E}}^{\mathrm{clean}} := \sum_{i=1}^{30} \lambda_i^{\mathrm{clean}} \mathbf{V}_i (\mathbf{V}_i)^{\mathrm{T}}$, et l'on retombe sur notre nouvelle estimation de la matrice de covariance avec

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n^{\mathrm{clean}} = \left[\hat{\mathbf{E}}_{i,j}^{\mathrm{clean}} \sqrt{\omega_i} \sqrt{\omega_j}\right]_{i,j}, \tag{9}$$

où $\omega_i = \left[\hat{\boldsymbol{\Omega}}_n\right]_{i,i}$ de (4). On va dorénavant utiliser cette estimation qui est *a priori* moins bruité.

1.3 Résolution du problème

On rappelle brièvement que l'on note a_0 la part investie dans le *cash* et $\mathbf{a}$ le vecteur des parts investies dans les 30 premiers actifs du CAC40. Soit $V_T(a_0, \mathbf{a})$ la valeur de notre portefeuille à la fin de l'investissement. Le problème d'optimisation moyenne/variance s'écrit alors

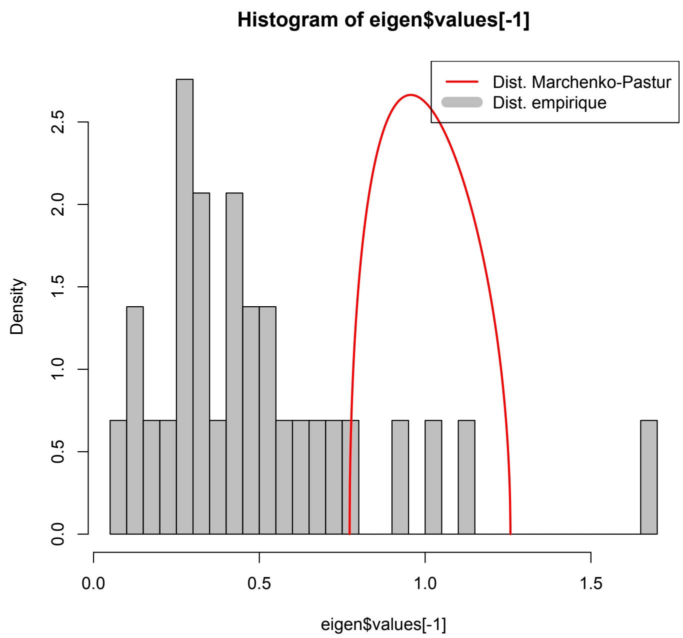

FIGURE 1 – Distribution des valeurs propres comparée à la distribution de Marčenko–Pastur.

$$\begin{aligned} & \max_{a_0,\mathbf{a}} \mathbb{E}\left[V_T(a_0,\mathbf{a})\right] \\ \text{s.c.} \quad & \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[V_T(a_0,\mathbf{a})\right] \ \leq \ \sigma^2 \\ & V_0(a_0,\mathbf{a}) \ = \ v. \end{aligned}$$

1.3.1 Avec actif sans risque

On se ramène au cours pour résoudre ce problème qui nous donne

$$\begin{cases} \mathbf{a} & = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Diag}(\mathbf{p}_0)^{-1}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}} \ ; \\ a_0 & = v \ - \ \frac{1}{\lambda}\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1} \ ; \\ \lambda & = \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}} \ , \end{cases}$$

où $\tilde{\boldsymbol{\mu}} := \boldsymbol{\mu} \ - \ (1+r)\mathbf{1}$ est le vecteur des rendement

La résolution numérique nous donne pour nos paramètres une aversion au risque $\lambda = 2.17$, et la part à mettre en cash $a_0 = -5.92$, aussi la Table

1 donne le nombre d'action à acheter ou *shorter* pour les cinq premières actions du CAC40.

Companie	**Ticker**	$\mathbf{p}_0$ (EUR)	$\mathbf{a}$
TOTAL S.A.	`FP.PA`	46.045	−0.01915
Capgemini SE	`CAP.PA`	98.890	0.00566
Credit Agricole S.A.	`ACA.PA`	13.800	0.03398
Sanofi	`SAN.PA`	25.820	0.01025
Carrefour SA	`CA.PA`	18.040	−0.05902

TABLE 1 – Résumé de la résolution du problème avec actif sans risque pour les cinq premières actions du CAC40.

Notre portefeuille a évidemment une valeur initiale de 1 et une volatilité de 20% (paramètres fixés au départ), et une espérance à $t = T$ de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[V_T(a_0, \mathbf{a})\right] &= a_0(1+r) \;+\; \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \operatorname{Diag}(\mathbf{p}_0)\hat{\boldsymbol{\mu}}_n \\ &= 1.083 \end{aligned} \tag{10}$$

On verra plus tard que dans le plan $(\sigma, \mathbb{E}\left[V_T(a_0, \mathbf{a})\right])$ est une droite.

1.3.2 Sans actif sans risque

Notre but est maintenant de résoudre le même problème mais on a plus la possibilité d'investir dans un actif sans risque, seule les trente premières actions du CAC40 sont à notre disposition.

Au lieu de fixer comme auparavant $\sigma = 20\%$, on va se fixer comme objectif $\mathbb{E}\left[V_T(\mathbf{a})\right] = m$, où on prend $m = 1.083$; on va donc chercher la part $\mathbf{a}$ à mettre dans chaque actif et comparer la variance de ce portefeuille avec $\sigma = 20\%$.

On peut montrer que dans le cas où $a_0 = 0$, la résolution devient

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}} &= \frac{v}{\Delta}\left((\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1} - (\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}\right) \\ &\quad + \frac{m}{\Delta}\left((\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu} - (\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1}\right), \end{aligned} \tag{11}$$

où $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}} = \operatorname{Diag}(\mathbf{p}_0)\mathbf{a}$ est la fortune investie dans chaque action et où

$$\Delta \;=\; (\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu})(\mathbf{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1}) \;-\; (\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1})^2. \tag{12}$$

La Table 2 nous donne le résultat de la computation ; on remarque dans un premier temps que ces valeurs sont proches de celles de la Table 1, en effet on est toujours *short* de `FP.PA` et `CA.PA` et *long* des autres. On verra plus tard qu'en fait les deux frontières efficientes on un point en commun (point tangent) et pour cette volatilité particulière on est proche de ce point.

Companie	**Ticker**	$\mathbf{p}_0$ (EUR)	$\mathbf{a}$
TOTAL S.A.	`FP.PA`	46.045	-0.03872
Capgemini SE	`CAP.PA`	98.890	0.00992
Credit Agricole S.A.	`ACA.PA`	13.800	0.06833
Sanofi	`SAN.PA`	25.820	0.01706
Carrefour SA	`CA.PA`	18.040	-0.10047

Table 2 – Résumé de la résolution du problème sans actif sans risque pour les cinq premières actions du CAC40.

Comme le posait le problème on a $v = 1$ et $\mathbb{E}[V_T(\mathbf{a})] = 1.083$; étudions la variance,

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar}[V_T(\mathbf{a})] &= \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_n \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{a}} \\ &= 0.067 \end{aligned} \tag{13}$$

d'où une volatilité d'environ 26%. En effet on a un degrés de liberté de moins (l'actif sans risque), pour atteindre la même espérance il faut donc prendre plus de risque *i.e.* la volatilité du portefeuille augmente. Ou bien de façon équivalente à volatilité fixé l'espérance de gain sera moins importante.

1.4 Frontière efficiente

On appelle frontière efficiente les points $\left(\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[V_T(a_0,\mathbf{a})]}, \mathbb{E}[V_T(a_0,\mathbf{a})]\right)$ du plan qui satisfont le problème. Il y a donc une frontière efficiente pour le premier problème (avec actif sans risque) et une pour le second (sans actif sans risque). L'étude précédente nous montrait déjà que la frontière 1 est au dessus de la frontière 2.

En fait la première frontière est une droite de coefficient directeur $\left(\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right)^{\frac{1}{2}}$ et d'ordonnée à l'origine $v(1+r)$. La seconde frontière est une demi-parabole. On a représenté ces deux frontières sur la Figure 2.

Si $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{1} > 0$ (ce qui est le cas pour nos données), on voit dans la résolution du problème 1 qu'il existe un σ pour lequel $a_0 = 0$. On note P^* ce portefeuille, qui appartient donc aux deux frontières efficientes, on l'a aussi représenté à la Figure 2. Numériquement on a

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbb{E}[P^*] &= 1.0087 \; ; \\ \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[P^*]} &= 28.8\% \end{aligned} \right.$$

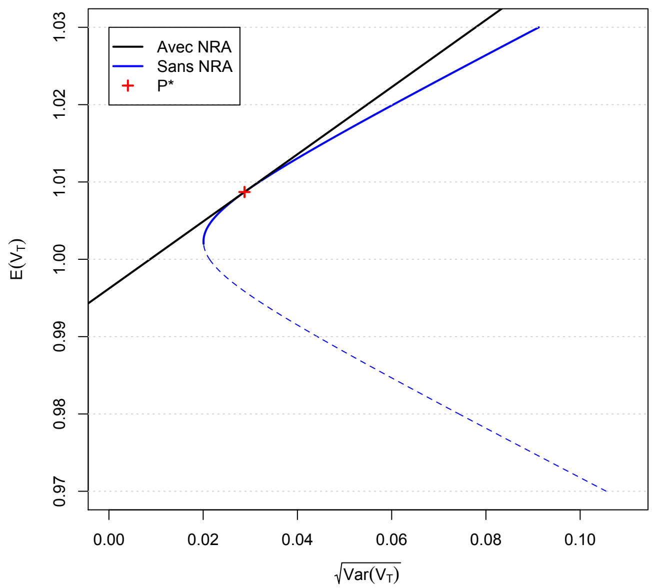

FIGURE 2 – Frontière efficiente pour les deux problèmes avec $v = 1$.

2 Liquidation de portefeuille – Approche de Almgren Chriss

2.1 Le problème et les données

Le problème est le suivant : on souhaite vendre un grand nombre d'action sur une courte période de temps. La première approche serait donc de tout vendre d'un seul coup. Le problème de cette méthode est qu'elle peut être coûteuse étant donné que l'on paie la liquidité (on va à la rencontre du *best ask* dans le carnet d'ordre).

La seconde approche, celle que nous verrons, propose de découper le temps qu'on s'est fixé pour vendre en une subdivision de plus petits intervalles et de vendre une certaine quantité d'actions sur chacun de ces intervalles. Or le fait de vendre moins mais pendant plus longtemps ; on va donc moins profondément dans le carnet d'ordre, mais cela nous expose aux variations du cours de l'action dues à sa volatilité ainsi qu'au *market impact*. L'idée est donc de trouver une stratégie de vente permettant de minimiser les coûts.

2.2 Modélisation

On veut vendre un nombre X d'action en un temps T. Pour cela on commence par discrétiser l'intervalle $[0,T]$ en N intervalles de taille $\tau = \frac{T}{N}$. Une stratégie de vente sera le vecteur $(x_1, x_2, ..., x_N)$ où x_k est la quantité d'action qu'il nous reste au temps $t_k = k\tau$.

Dans le modèle d'Almgren–Chriss utilisé, on calcule le coût de notre stratégie de *trading* avec la formule suivante :

$$C \;=\; \sum_{k=1}^{N} \left(\sigma\sqrt{\tau}\xi_k - \tau g(\frac{n_k}{\tau})\right) x_k \;-\; \sum_{k=1}^{N} n_k h(\frac{n_k}{\tau})\,, \tag{14}$$

où les ξ_k sont des variables aléatoires Gaussiennes standard identiquement distribuées. On note σ est la volatilité du produit. La fonction g modélise l'impact permanent, c'est à dire la modification du prix d'équilibre dû à notre impact en tant que vendeur. Cette impact dure le temps de la liquidation de notre portefeuille. La fonction h modélise l'impact temporaire. Celui-ci est causé par le fait qu'en vendant beaucoup on consomme une grande partie de la liquidité disponible. On suppose que la liquidité revient à la normale à chaque t_k. On suppose de plus que ces deux fonctions dépendent de $\frac{n_k}{\tau}$, le volume moyen de vente sur un intervalle de temps τ.

La stratégie optimale sera donc celle qui minimise la quantité

$$\mathbb{E}\left[C\right] \;+\; \lambda \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[C\right]\,, \tag{15}$$

avec λ un paramètre d'aversion au risque.

On fait ensuite l'hypothèse simplificatrice de considérer que les fonctions g et h sont linéaires par rapport à $\frac{n_k}{\tau}$. Ainsi on aura

$$\begin{aligned} g(\frac{n_k}{\tau}) \;&=\; \gamma\frac{n_k}{\tau}\;; \\ h(\frac{n_k}{\tau}) \;&=\; \varepsilon \;+\; \eta\frac{n_k}{\tau}. \end{aligned}$$

Où ε représente un coût fixe, γ représente le taux auquel le prix se déprécie quand on vend n actions et η l'impact sur le prix par action d'un volume moyen de vente $\frac{n}{\tau}$.

L'optimisation va donc consister à minimiser

$$\mathbb{E}\left[C\right] \;+\; \lambda \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[C\right] \;=\; \frac{1}{2}\gamma X^2 \;+\; \varepsilon X \;+\; \frac{\tilde{\eta}}{\tau}\sum_{k=1}^{N}(x_{k-1}-x_k)^2 \;+\; \lambda\sigma^2\sum_{k=1}^{N}\tau x_k^2\,, \tag{16}$$

avec $\tilde{\eta} := \eta - \frac{1}{2}\gamma\tau$.

Après quelques calculs on obtient finalement avec ce modèle la stratégie optimale suivante

$$x_k \;=\; X\frac{\sinh(K(T-t_k))}{\sinh(KT)}\,, \tag{17}$$

avec K tel que $\frac{2}{\tau^2}(\cosh(K\tau)-1) = \tilde{K}$ et $\tilde{K} = \frac{\lambda\sigma^2}{\tilde{\eta}}$.

2.3 Exemple

2.3.1 Détermination des paramètres

On va chercher la stratégie optimale pour vendre $X = 10\ 000$ actions BNP Paribas sur une période $T = 5$ jours. Les données utilisées sont issues du site Yahoo Finance [4] et on utilisera les données de *close* et de volume sur la période 2016-01-04 jusqu'à 2018-02-02, soit un échantillon de 536 valeurs. On choisit de vendre sur des intervalles de 4 heures (5 jours $\div$ 30 périodes) avec comme prix initial la dernière valeur du *close* disponible. On aura donc les paramètres suivants :

$$\left\{\begin{array}{rcl} X & = & 10\ 000\ ; \\ T & = & 5\ ; \\ N & = & 30\ ; \\ \tau & = & \frac{5}{30}\ ; \\ S_0 & = & 66. \end{array}\right.$$

On estime ensuite la volatilité journalière (étant donné qu'on a exprimé T en jours) avec la formule suivante

4. `https://fr.finance.yahoo.com/quote/BNP.PA/history?p=BNP.PA`.

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{536}\sum_{k=1}^{536}(R_k - \bar{R})^2} \qquad (18)\\ &= 1.95\%\end{aligned}$$

où $R_k := \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$ et $\bar{R} := \frac{1}{536}\sum_{k=1}^{536} R_k$.

Pour l'estimation du paramètre η on va faire l'approximation suivante : on considère que vendre un volume de l'ordre d'un pour cent du volume journalier median impact le prix d'une fois le *bid-ask spread*. Et on prendra comme valeur de *spread* un *tick*, qui est de 0.005€ pour les valeurs cotées sur le marché Euronext. De plus le volume journalier median sur notre échantillon vaut 3 670 000. On a donc

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{0.005}{0.01 \times 3670000} \qquad (19)\\ &= 1.4 \times 10^{-7}.\end{aligned}$$

Pour estimer γ dû à l'effet permanent, on va considérer que l'effet est permanent si on vend 10% du volume journalier median. On aura donc $\gamma = \frac{0.005}{0.1\times3670000} = 1.4 \times 10^{-8}$.

2.3.2 Stratégies naïves

Dans un premier on pense à une stratégie particulière qui consisterait à liquider le même nombre d'actions sur une période de temps. Dans ce cas précis on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[C_1\right] &= \frac{1}{2}\gamma X^2 \ + \ \varepsilon X \ + \ \tilde{\eta}\frac{X^2}{T}\\ &= 84.76\\ \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[C_1\right] &= \frac{\sigma^2}{3}X^2 T\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{1}{2N}\right)\\ &= 60445\end{aligned}$$

On s'attend donc en moyenne à perdre environ 85€ par rapport à $XS_0 = 6600$, mais avec un écart type de 245.85, donc une variation assez importante. On peut montrer que cette stratégie a la plus petite espérance de *trading cost*, néanmoins on voit que la variance est assez grande.

Une seconde stratégie naïve serait de tout vendre d'un coup, on aurait donc $x_0 = X$ et $x_i = 0$ pour $i \in 1 : N$. Évidement pour cette stratégie on a une variance nulle (tout est déterministe) et un *trading cost* de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[C_2\right] &= \varepsilon X + \frac{\eta X^2}{\tau} \\ &= 890. \end{aligned}$$

On voit donc que l'on paie le fait que la stratégie soit déterministe sur une coût bien plus important.

2.3.3 Simulation

On simule maintenant différentes stratégies optimales pour plusieurs facteur d'aversion au risque.

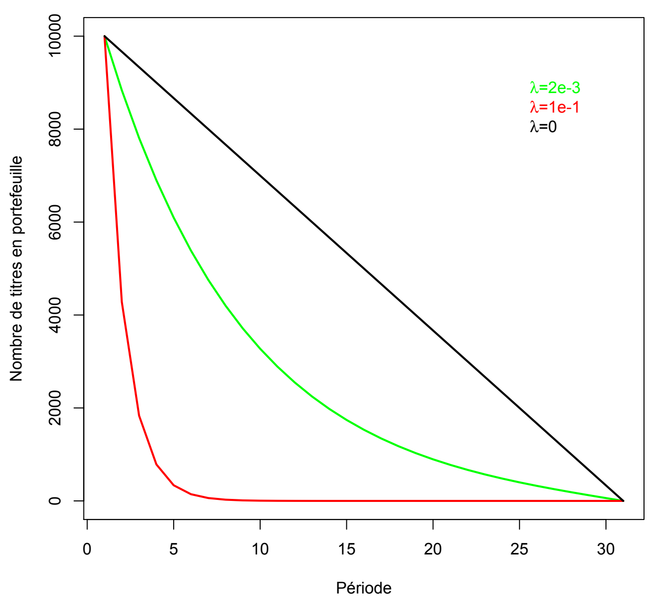

FIGURE 3 – Stratégies optimales pour un portefeuille constitué d'un actif.

La Figure 3 montre trois stratégies de vente avec des facteurs de risque différents. Pour $\lambda = 0$ on retrouve bien sûr la première stratégie naïve *i.e.*

on cherche à minimiser uniquement l'espérance ce qui revient à liquider le même nombre d'actions pour chaque période.

Pour la plus grande aversion au risque $\lambda = 0.1$ on cherche à vendre un maximum au début de la période, de façon à limiter l'imprévu lorsque le temps augmente. On se rapproche donc de la seconde stratégie naïve, on voit bien que la courbe rouge a une pente très forte au début.

Enfin pour $\lambda = 0.002$ on se retrouve globalement entre les deux stratégies précédemment décrites. On a reporté quelques chiffres dans la Table 3.

Période	**Nb d'action dans le portefeuille**		
	$\boldsymbol{\lambda = 0.1}$	$\boldsymbol{\lambda = 0.002}$	$\boldsymbol{\lambda = 0}$
0	10000.00	10000.00	10000.00
1	4282.40	8836.86	9666.67
2	1833.89	7808.64	9333.33
7	61.68	4757.01	8000
29	1.70×10^{-7}	60.98	333.33

Table 3 – Stratégies optimales pour un portefeuille constitué d'un actif.