Exercices
Feuille #6. Formule d'Itô et applications

Antoine Falck

9 décembre 2017

⋆ **Exercice 1.** Soit H un processus progressif tel que pour tout $t \geq 0$, $\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s < \infty$ p.s. Soit

$$X_t \quad := \quad \exp\left(-\int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s \; + \; \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s\right).$$

Montrer que

$$X_t \; + \; \int_0^t X_s H_s \, \mathrm{d}B_s \; - \; \int_0^t X_s H_s^2 \, \mathrm{d}s \quad = \quad 1.$$

Démonstration. On applique la formule d'Itô avec les deux semimartingales $\int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s$ et $\int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}s$, et la fonction de classe $\mathcal{C}^2$

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^{-x+\frac{1}{2}y}. \end{array}$$

On a alors avec la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} X_t \quad &= \quad X_0 \; + \; \int_0^t (-X_s) \, \mathrm{d}\left(\int_0^s H_u \, \mathrm{d}B_u\right) \; + \; \int_0^t \frac{1}{2} X_s \, \mathrm{d}\left(\int_0^s H_u^2 \, \mathrm{d}u\right) \; + \; \frac{1}{2}\int_0^t X_s \, \mathrm{d}\left\langle \int_0^\cdot H_u \, \mathrm{d}B_u \right\rangle_s \\ &= \quad 1 \; - \; \int_0^t X_s H_s \, \mathrm{d}B_t \; + \; \frac{1}{2}\int_0^t X_s H_s^2 \, \mathrm{d}s \; + \; \frac{1}{2}\int_0^t X_s H_s^2 \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

□

⋆ **Exercice 2.** Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0 = a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. On pose $M_t := \frac{1}{|B_t|}$, où $|B_t|$ désigne le module euclidien de B_t.

(i) Montrer que $(M_t, \, t \geq 1)$ est une martingale locale continue.
(ii) Montrer que $(M_t, \, t \geq 1)$ est uniformément intégrable.
(iii) Montrer que $(M_t, \, t \geq 1)$ n'est pas une martingale.

Démonstration. (i) On pose $X_t = |B_t|^2$, donc avec Itô

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t \quad &= \quad \sum_{i=1}^3 2B_t^i \, \mathrm{d}B_t^i \; + \; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 2 \, \mathrm{d}s \; ; \\ \mathrm{d}\langle X \rangle_t \quad &= \quad \sum_{i=1}^3 2^2 (B_t^i)^2 \, \mathrm{d}t \\ &= \quad 4X_t \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Now with Itô on $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $M_t = f(X_t)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}M_s \quad &= \quad -\frac{1}{2}\frac{1}{X_s^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}X_s \; + \; \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{X_s^{\frac{5}{2}}} \, \mathrm{d}\langle X \rangle_s \\ &= \quad [\text{mart. loc.}] \; - \; \frac{3}{2}\frac{1}{X_s^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}s \; + \; \frac{3}{2}\frac{X_s}{X_s^{\frac{5}{2}}} \, \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

(ii) Sans perte de généralités on prend $M_0 = (a, 0, 0)$. Avec $p = \frac{3}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_t|^p] &\leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{|\beta_t|^p}\right] \qquad \text{où } \beta \text{ est un mouvement brownien } \mathbb{R}^2 \\
&\leq \mathbb{E}\left[\frac{1}{t^{\frac{p}{2}}|\beta_1|^p}\right] \\
&\leq \int_0^\infty \mathbb{P}\left\{\frac{1}{t^{\frac{p}{2}}|\beta_1|^p} \geq x\right\} \mathrm{d}x \\
&\leq 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left\{|\beta_1| \leq \sqrt{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \mathrm{d}x \\
&\leq 1 + \int_1^\infty \mathbb{P}\left\{|N_1| \leq \sqrt{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}^2 \mathrm{d}x \\
&\leq 1 + \int_1^\infty \left(\int_{-\sqrt{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}}^{\sqrt{t}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq 1 + c_t \frac{1}{x^{\frac{2}{p}}} < \infty.
\end{aligned}$$

Et $\sup_{t \geq 1} \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$ grâce à la propriété de scaling.

(iii) On sait que $B_t \to \infty$, donc $M_t \to 0$. Si c'est une martingale UI alors $M_t = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t] = 0$, contradiction. □

⋆ **Exercice 3.** Soit M une martingale locale continue issue de 0 telle que $\langle M \rangle_\infty = \infty$ p.s. Montrer que $\mathcal{E}(M)$ ne peut être une martingale uniformément intégrable.

Démonstration. On pose $N := \mathcal{E}(M)$. On a $B_s - s \xrightarrow[s \to \infty]{} -\infty$, et donc

$$\begin{aligned}
M_t - \langle M \rangle_t &= B_{\langle M \rangle_t} - \langle M \rangle_t \qquad \text{(Dubin–Schwartz)} \\
&\xrightarrow[t \to \infty]{\text{p.s.}} -\infty.
\end{aligned}$$

Si N était une martingale UI, $N_t = \mathbb{E}[N_\infty | \mathcal{F}_t] = 0$, contradiction. □