Exercices
Feuille #5. Intégrale stochastique

Antoine Falck

15 novembre 2017

⋆ **Exercice 1.** 1. Construire un exemple de semimartingale continue bornée X et de processus continu adapté borné H tel que $H \cdot X$ ne soit pas borné.

Démonstration. On prend $X := B^T$, avec $T := \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq 0\}$. Et $H := B^T$, on a alors

$$\begin{aligned} \int_0^t H_s \, \mathrm{d}B_s &= \int_0^t B_s^T \, \mathrm{d}B_s^T \\ &= \frac{1}{2}\left(B_{T\wedge t}^2 - T \wedge t\right) \end{aligned}$$

et $T \wedge t$ n'est pas borné, donc $H \cdot X$ pas non plus. □

⋆ **Exercice 2.** Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien.

(i) Montrer que le processus $\left(\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}B_s,\, t \geq 0\right)$ est bien défini.

(ii) Montrer que p.s. $\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}B_s = 0$ pour tout $t \geq 0$.

Démonstration. (i). Il faut montrer que $H_t := \mathbb{1}_{\{B_s=0\}}$ est progressif et localement borné. H_t est borné donc localement borné. B est progressif et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \mathbb{1}_{\{0\}}(x)$ est mesurable. La composition $f \circ B_t$ (fonction de ω) est donc progressive.

(ii). On pose $M := H \cdot B$ est une martingale locale continue et nulle en 0.

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_t &= \int_0^t H_s^2 \, \mathrm{d}\langle B \rangle_s \\ &= \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\langle M \rangle_t\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}} \, \mathrm{d}t\right] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{B_s=0\}}\right] \, \mathrm{d}t \qquad \text{par Fubini–Tonelli} \end{aligned}$$

or $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{B_s=0\}}\right] = \mathbb{P}\{B_s = 0\} = 0$. D'où $\mathbb{E}\left[\langle M \rangle_t\right] = 0$ et donc $\forall t$ $\langle M \rangle_t = 0$ p.s. Puis p.s. $\langle M \rangle_t = 0$ pour tout t (on passe sur $t \in \mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$ par continuité du crochet). D'où finalement p.s. $M_t = 0$ $\forall t$. □

⋆ **Exercice 3.** Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-m.b. Soit $X_t := \frac{B_t}{1+t}$, $t \geq 0$. Montrer que

$$X_t = \int_0^t \frac{1}{1+s} \, \mathrm{d}B_s - \int_0^t \frac{X_s}{1+s} \, \mathrm{d}s.$$

Démonstration. On a $X_t = B_t Y_t$, avec $Y_t := \frac{1}{1+t}$. On utilise donc la formule d'IPP

$$\begin{aligned} X_t &= B_0 Y_0 + \int_0^t Y_s \, \mathrm{d}B_s + \int_0^t B_s \, \mathrm{d}Y_s + \langle B_t, Y_t \rangle \\ &= 0 + \int_0^t \frac{1}{1+s} \, \mathrm{d}B_s - \int_0^t \frac{B_s}{(1+s)^2} \, \mathrm{d}s + 0 \end{aligned}$$

□