Exercices
Feuille #4. Semimartingales continues

Antoine Falck

6 novembre 2017

$\star$ **Exercice 1.** Soit M une martingale locale continue. Montrer que M est une martingale UI ssi $(M_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}},\ T \text{ t.a.})$ est UI.

Démonstration. "$\Rightarrow$". Trivial car avec le théorème d'arrêt $M_T = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_T]$ p.s.

"$\Leftarrow$". L'UI est évidente. Montrons que c'est une martingale. $(M_t,\ t \geq 0)$ est adapté car c'est une martingale locale. $(M_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}},\ T \text{ t.a.})$ est UI donc $\forall T$, $\mathbb{E}[M_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] < \infty$ et donc $\forall t \geq 0$, $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$. Pour montrer la dernière propriété des martingales il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_s$, $\mathbb{E}[M_t \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[M_s \mathbb{1}_A]$. M est une martingale locale continue donc $\exists (T_n) \uparrow \infty$ t.q. $\forall n$ $(M_{t\wedge T_n} - M_0,\, t \geq 0)$ est une martingale UI. Comme M_0 est intégrable, $\forall n$, $(M_{t\wedge T_n,\, t\geq 0)}$ est une martingale UI. $\square$

$\star$ **Exercice 2.** Donner un exemple de martingale M continue bornée telle que $\langle M \rangle$ ne soit pas borné.

Démonstration. On pose $T := \inf\{t \geq 0,\, |B_t| = 1\}$, $M_t := B_{t\wedge T}$ est bornée. Son crochet vaut $\langle M \rangle_t = t \wedge T$. Et $\sup_{t\geq 0} |T \wedge t| = T$ est non borné (exercice de la feuille #3). $\square$