Exercices
Feuille #3. Martingales

Antoine Falck

12 novembre 2017

⋆ **Exercice 1.** 1. Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ p.s. Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0} M_t \geq x | \mathcal{F}_0\right\} = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$ p.s.

2. Soit B un mouvement brownien. Donner la loi de $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$.

Démonstration. 1. On pose $T := \inf\{t \geq 0,\ M_t \geq x\}$. Et $(M_{T\wedge t},\ t \geq 0)$ est une martingale UI et par le théorème d'arrêt :

$$\mathbb{E}[M_{T\wedge t}|\mathcal{F}_0] \quad = \quad M_0\,,$$

et donc $\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_0] = M_0$. On a,

$$\begin{aligned} M_T \quad &:= \quad M_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} + \underbrace{M_T \mathbb{1}_{\{T=\infty\}}}_{=\,0} \\ &= \quad (M_0 \vee x)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\begin{aligned} & M_0 \;=\; \mathbb{E}\left[(M_0 \vee x)\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_0\right] \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{M_0}{M_0 \vee x} \;=\; \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_0\right] \\ \Leftrightarrow \quad & 1 \wedge \frac{M_0}{x} \;=\; \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0} M_t \geq x|\mathcal{F}_0\right\}. \end{aligned}$$

2. On sait que $\left(e^{\theta B_t - \frac{\theta^2}{2}t},\ t \geq 0\right)$, $\theta \in \mathbb{R}$, est une martingale. On peut donc prendre $\theta = 2$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{\sup_t e^{2(B_t - t)} \geq x|\mathcal{F}_0\} \;=\; 1 \wedge \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}\{\sup_t B_t - t \geq x|\mathcal{F}_0\} \;=\; 1 \wedge e^{-2x} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{P}\{\sup_t B_t - t \leq x|\mathcal{F}_0\} \;=\; \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}(1 - e^{-2x}). \end{aligned}$$

Donc $(B_t - t) \sim \mathcal{E}(2)$.

□