Exercices
Feuille #2. Le mouvement brownien

Antoine Falck

11 octobre 2017

⋆ **Exercice 1.** Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}[B_5|\mathcal{F}_1]$ et $\mathbb{E}[B_5^2|\mathcal{F}_1]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_5|\mathbb{F}_1] &= \mathbb{E}[B_5 - B_1 + B_1|\mathcal{F}_1] \\
&= \mathbb{E}[B_5 - B_1|\mathcal{F}_1] \ + \ \mathbb{E}[B_1|\mathcal{F}_1] \\
&= \mathbb{E}[B_5 - B_1] \ + \ B_1 \ , \qquad \text{propriété de Markov} \\
&= B_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_5^2|\mathbb{F}_1] &= \mathbb{E}[(B_5 - B_1 + B_1)^2|\mathbb{F}_1] \\
&= \mathbb{E}[(B_5 - B_1)^2|\mathcal{F}_1] \ + \ \mathbb{E}[B_1^2|\mathcal{F}_1] \ + \ \mathbb{E}[(B_5 - B_1)B_1|\mathcal{F}_1] \\
&= \mathrm{Var}[B_5 - B_1] \ + \ B_1^2 \ + \ 0 \\
&= 4 \ + \ B_1^2.
\end{aligned}$$

□

⋆ **Exercice 2.** (i) Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}s$ a la même loi que $t^2 \int_0^t B_1^2 \mathrm{d}s$.
(ii) Montrer que les processus $(\int_0^t B_s^2 \mathrm{d}s,\ t \geq 0)$ et $(t^2 \int_0^t B_1^2 \mathrm{d}s,\ t \geq 0)$ n'ont pas le même loi.

Démonstration. (i).

$$\begin{aligned}
\int_0^t B_s^2 \ \mathrm{d}s &= \int_0^1 B_{tu}^2 t \ \mathrm{d}u \ , \qquad \text{avec le changement de variable } s := tu \\
&= t^2 \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{t^2} B_{tu}^2}_{X_u} \ \mathrm{d}u \ , \qquad \text{où } X_u \text{ est un mouvement brownien (\textit{scaling})}
\end{aligned}$$

(ii). $t \mapsto t^2 \int_0^t B_1^2 \mathrm{d}s \in C^\infty(]0, \infty[)$ ce qui n'est pas le cas de $t \mapsto \int_0^t B_s^2 \mathrm{d}s$. □

Exercice 3. (i) Soit $\xi := \int_0^1 B_t \mathrm{d}t$. Quelle est la loi de ξ ?
(ii) Soit $\eta := \int_0^2 B_1 \mathrm{d}t$. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[B_1|\eta]$.

Démonstration. (i). L'intégrale existe comme intégrale de fonction continue sur un compact. De plus ξ est bien une v.a. comme somme de Riemann de v.a. Donc ξ est une v.a. gaussienne, étant limite p.s. de v.a. gaussiennes qui sont des sommes de Riemann. Calculons sont espérance et a variance.
$\mathbb{E}[\int_0^1 |B_s| \mathrm{d}s] = \int_0^1 \mathbb{E}[|B_s|] \mathrm{d}s$ par le théorème de Fubini–Tonelli, et on a $\int_0^1 \mathbb{E}[|B_s|]\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{s}\mathbb{E}[|B_1|]\mathrm{d}s < \infty$, on peut donc appliquer Fubini-Lebesgue : $\mathbb{E}[\xi] = \int_0^1 \mathbb{E}[B_t]\mathrm{d}t = 0$.
Pour les mêmes raisons que précédemment $\mathbb{E}[\xi^2] = \mathbb{E}[\int_0^1 \int_0^1 B_t B_s \mathrm{d}t\mathrm{d}s] = \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{E}[B_t B_s]\mathrm{d}t\mathrm{d}s$, d'où,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\xi] &= \int_0^1 \int_0^1 s \wedge t \ \mathrm{d}t \ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^s t \ \mathrm{d}t \ + \ \int_0^1 s \ \mathrm{d}t \right) \ \mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 \frac{s^2}{2} + s(1-s) \ \mathrm{d}s \ = \ \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(ii). On a $\eta \sim \mathcal{N}(0, \frac{8}{3})$. Et le vecteur (B_1, η) est gaussien, de covariance,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_1 \eta] &= \int_0^2 1 \wedge t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

So,

$$(B_1, \eta) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \right).$$

And we have

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[B_1 | \eta] &= \mathbb{E}[B_1] + \frac{\mathrm{Cov}(B_1, \eta)}{\mathrm{Var}[\eta]}(\eta - \mathbb{E}[\eta]) \\ &= \frac{9}{16}\eta.\end{aligned}$$

□

⋆ **Exercice 4** (Loi de l'arc sinus). Soit $G := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$. Montrer que $\mathbb{P}\{G \leq t\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{t}$ pour tout $t \in [0, 1]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{G \leq t\} &= \mathbb{P}\{B_s \neq 0, s \in]t, 1]\} \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{P}\{B_s \neq 0, s \in]t, 1] \mid \mathcal{F}_t\}] \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left\{\tilde{B}_s \neq -B_t, u \in]0, 1-t] \mid \mathcal{F}_t\right\}\right], \qquad \tilde{B}_u := B_{u+t} - B_t \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{P}\{T_{-B_t} > 1 - t \mid \mathcal{F}_t\}], \qquad \text{et } T_a \sim \frac{a^2}{B_1^2} \\ &= \mathbb{E}\left[\mathbb{P}\left\{\frac{\hat{B}_t^2}{B_1^2} > 1 - t \;\middle|\; \mathcal{F}_t\right\}\right] \\ &= \mathbb{P}\left\{\frac{t\hat{B}_1^2}{B_1^2} > 1 - t\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{|Z| < \sqrt{t}\right\},\end{aligned}$$

où $Z := \frac{B_1}{\sqrt{B_1^2 + \hat{B}_1^2}}$. La densité du vecteur $(B_1, \hat{B}_1)$ est $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, invariante par rotation de centre l'origine du plan, donc $Z \sim \sin\Theta$ où $\Theta \sim \mathcal{U}([-\pi, \pi[)$. Finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{G \leq t\} &= \mathbb{P}\left\{|\sin\Theta| < \sqrt{t}\right\} \\ &= 2\mathbb{P}\left\{|\Theta| < \arcsin\sqrt{t}\right\} \\ &= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}.\end{aligned}$$

□

⋆ **Exercice 5.** Soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres strictement décroissante vers 0. Montrer que p.s., $B_{t_n} > 0$ pour une infinité de n, et $B_{t_n} < 0$ pour une infinité de n.

Démonstration. On pose $A_n := \{B_{t_n} > 0\}$. Pour tout $s > 0$, $\limsup A_n \in \mathcal{F}_s$, en effet il existe un rang n_0 t.q. $t_{n_0} \leq s$. Donc $\limsup A_n \in \mathcal{F}_{0+}$, avec $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$. De plus $\mathbb{P}\{\limsup A_n\} \geq \limsup \mathbb{P}A_n \geq \frac{1}{2}$, par lemme de Fatou. D'où $\mathbb{P}\{\limsup A_n\} = 1$. □

⋆ **Exercice 6.** Soit $S_t := \sup_{s \in [0,t]} B_s$, avec $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\tilde{N}|, 0\}$, où N et $\tilde{N}$ désignent deux v.a. indépendantes suivant la loi gaussienne centrée réduite.

Démonstration. On peut écrire

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= \max\{\sup_{t\in[0,1]} B_t, \sup_{t\in[1,2]} B_t\} - \sup_{t\in[0,1]} B_t \\ &= \max\{0, \sup_{t\in[1,2]} B_t - \sup_{t\in[0,1]} B_t\}. \end{aligned}$$

Montrons alors que $\sup_{t\in[1,2]} B_t - \sup_{t\in[0,1]} B_t \sim |N| - |\tilde{N}|$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[1,2]} B_t - \sup_{t\in[0,1]} B_t)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[0,1]} \tilde{B}_t + B_1 - \sup_{t\in[0,1]} B_t)|\mathcal{F}_t]\ , \qquad h \text{ fonction test, } \tilde{B}_t := B_{t+1} - B_1 \\ &= \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[0,1]} \tilde{B}_t - \sup_{t\in[0,1]} (B_t - B_1))|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[0,1]} \tilde{B}_t - \sup_{t\in[0,1]} (B_{1-t} - B_1))|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[0,1]} \tilde{B}_t - \sup_{t\in[0,1]} (-\hat{B}_t))|\mathcal{F}_t] \\ &= \mathbb{E}[h(\sup_{t\in[0,1]} \tilde{B}_t - \sup_{t\in[0,1]} \hat{B}_t)|\mathcal{F}_t]. \end{aligned}$$

On a avec la propriété de Markov $\hat{B}_t \perp\!\!\!\perp \tilde{B}_t$, de plus $\sup_{t\in[0,1]} B_t \sim |B_1|$ et en prenant l'espérance de ce dernier terme on a bien montré la relation. $\square$

Exercice 7 (Propriété de Feller)**.** Montrer que si $f \in \mathcal{C}_0$ (fonction continue telle que $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$), alors $P_t f \in \mathcal{C}_0$, pour tout $t \geq 0$, et $\lim_{t\downarrow 0} P_t f = f$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On rappelle que

$$\begin{aligned} (P_t f)(x) &:= \mathbb{E}[f(x + B_t)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\ \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Soit une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ on a $f(x_n+y) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x+y)$ et f est bornée on a donc par convergence dominée

$$\begin{aligned} (P_t f)(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x_n + y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\ \mathrm{d}y \\ &\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x + y) e^{-\frac{y^2}{2t}}\ \mathrm{d}y \ = \ (P_t f)(x). \end{aligned}$$

On utilise la même preuve pour montrer que $\lim_{|x|\to\infty} (P_t f)(x) = 0$.

Montrons la convergence uniforme de $P_t f$ vers f.

$$\begin{aligned} |(P_t f)(x) - f(x)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} (f(x+y) - f(x))\, e^{-\frac{y^2}{2t}}\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (f(x+\sqrt{t}z) - f(x)) e^{-\frac{z^2}{2}}\ \mathrm{d}z\ , \qquad z := \frac{y}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M}^{M} (f(x+\sqrt{t}z) - f(x)) e^{-\frac{z^2}{2}}\ \mathrm{d}z \ + \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|z|>M} (f(x+\sqrt{t}z) - f(x)) e^{-\frac{z^2}{2}}\ \mathrm{d}. \end{aligned}$$

La première partie peut être majorée par la continuité sur un compact tandis que la deuxième est majorée par $\|f\|_\infty$ pour M assez grand. $\square$