Exercices
Feuille #1. Préacquis

Antoine Falck

10 octobre 2017

⋆ **Exercice 1.** Soient ξ et η des v.a.r. qui ont mêmes loi. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Les v.a. $f(\xi)$ et $f(\eta)$ ont-elles la même loi ?

Démonstration. On a par définition $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Pr\{\xi < x\} = \Pr\{\eta < x\}$. Donc avec $y := f(x)$, $\forall y \in f(\mathbb{R})$, $\Pr\{f(\xi) < y\} = \Pr\{f(\eta) < y\}$. □

⋆ **Exercice 2.** Soit $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$. Soit $x > 0$ un réel. Montrer que

(i) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \ \leq\ \Pr\{\xi > x\} \ \leq\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

(ii) $\Pr\{\xi > x\} \ \leq\ e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Démonstration. Montrons (i). On note pour la suite $\Phi(x)$ et $\phi(t)$ respectivement les fonctions de répartitions et de densités le la loi normale centrée réduite.

$$\begin{aligned}
\Pr\{\xi > x\} &\triangleq \int_x^\infty \phi(t)\mathrm{d}t \\
&\leq \int_x^\infty \frac{t}{x}\phi(t)\ \mathrm{d}t\ , \qquad \forall t \in [x,\infty],\ \frac{t}{x} \geq 1 \\
&\leq \frac{1}{x}\ [-\phi(t)]_x^\infty \\
&\leq \frac{\phi(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Montrons (ii).

$$\begin{aligned}
\Pr\{\xi > x\} &\triangleq \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u+x)^2}{2}}\mathrm{d}u\ , \qquad \text{changement de variable } u = t - x \\
&\leq e^{-\frac{x^2}{2}}\Phi(0)\ , \qquad e^{-\frac{(u+v)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{u^2}{2}-uv} \leq e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{u^2}{2}} \\
&\leq \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 3. Soit ξ une v.a.r. suivant la loi gaussienne centrée réduite. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{F}$ définie par $\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}[e^{a\xi-\frac{a^2}{2}}\mathbb{1}_A]$ pour tout $A \in \mathbb{F}$.

Démonstration. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\xi < t) &\triangleq \mathbb{E}[e^{a\xi-\frac{a^2}{2}}\mathbb{1}_{\xi<t}] \\
&= \int_{-\infty}^t e^{a\xi-\frac{a^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\ \mathrm{d}u \\
&= \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(u+a)^2}{2}}\ \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

D'où $\xi \sim^{\mathbb{Q}} \mathcal{N}(a,1)$. □

$\star$ **Exercice 4.** Soient ξ et η deux v.a. intégrables, et soit $\mathcal{G}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

(i) Montrer que $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] \leq \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]$ p.s. ssi $\mathbb{E}[\xi\mathbb{1}_A] \leq \mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{G}] = \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]$ p.s. ssi $\mathbb{E}[\xi\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{G}$.

Démonstration. (i). Sans perte de généralité on suppose que $\xi = 0$. En effet par linéarité on passe simplement au cas général.
"$\Rightarrow$". On suppose que $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s., pour tout $A \in \mathcal{G}$ on a $\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A|\mathcal{G}]] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]]$ puisque $A \in \mathcal{G}$, donc $\mathbb{1}_A$ est $\mathcal{G}$-mesurable. Or $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] \geq 0$ et l'indicatrice aussi. Donc $\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A] \geq 0]$.
"$\Leftarrow$". On suppose que pour tout $A \in \mathcal{G}$, $\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_A] \geq 0$. Posons $A_k := \{\omega \ / \ \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] < -\frac{1}{k}\} \in \mathcal{G}$. Donc $\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_{A_k}] \geq 0$; et d'autre part $\mathbb{E}[\eta\mathbb{1}_{A_k}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}]\mathbb{1}_{A_k}] \leq -\frac{1}{k}\mathbb{P}\{A_k\}$. Donc pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}\{A_k\} = 0$. Et $\mathbb{P}\{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_k\} = 0$; or l'évènement $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \{\omega \ / \ \mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] \leq 0\}$. On a donc $\mathbb{P}\{\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] \leq 0\} = 0$ et en passant à l'opposé, $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s.

(ii). On procède de même que précédemment avec $\leq$, ce qui nous donne l'égalité. $\square$