

# RAPPORT

## Stratégies quantitatives et risque de crédit

Antoine FALCK

13 juillet 2018

SUJET 15 : Application de la théorie des matrices aléatoires.

### Introduction

Ce rapport s'inscrit dans la notation du cours « Stratégies quantitatives et risque de crédit » de M. Julien TURC. Le cœur du sujet étant l'étude des matrices aléatoires et son application en finance. Pour placer cette dernière étude dans un contexte plus concret, on s'intéressera aussi à l'optimisation d'un portefeuille de crédit, on appliquera ensuite la théorie des matrices aléatoires à cette optimisation, et enfin on pourra analyser les résultats obtenus par rapport à la méthode générale.

Tous les calculs ont été fait avec le langage R [4], les codes sont disponibles sur le site de l'auteur : [antoine-falck.fr](http://antoine-falck.fr). Toutes les données proviennent de Bloomberg<sup>1</sup>.

### Sommaire

<b>1</b>	<b>Optimisation d'un portefeuille de crédit : MARKOWITZ</b>	<b>2</b>
1.1	La théorie de MARKOWITZ . . . . .	2
1.1.1	Paramètres du portefeuille . . . . .	2
1.1.2	Optimisation du portefeuille . . . . .	2
1.1.3	Frontière efficiente . . . . .	4
1.1.4	Sans actif sans risque . . . . .	4
1.2	Application sur un portefeuille de crédit . . . . .	4
1.2.1	Présentation de notre univers . . . . .	4
1.2.2	Résultat de l'optimisation moyenne-variance . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Estimation de la matrice de variance covariance</b>	<b>5</b>
2.1	Théorie des matrices aléatoires . . . . .	5
2.1.1	Distribution des valeurs propres . . . . .	5
2.1.2	Application à l'estimation de matrices de variance-covariance . . . . .	6
2.2	Estimation sur notre portefeuille . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Comparaison entre la matrice brute et filtrée</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>8</b>

---

1. Je tiens à remercier Myriam DAESCHLER pour m'avoir fourni ces données.

# 1 Optimisation d'un portefeuille de crédit : MARKOWITZ

## 1.1 La théorie de MARKOWITZ

Les sections suivantes détaillent la théorie initialement développée par MARKOWITZ dans [3].

### 1.1.1 Paramètres du portefeuille

On suppose que l'on puisse investir dans  $N$  actifs risqués ; on commence à investir à  $t = 0$  et on regarde les gains à  $t = 1$ . On note  $p_t^{(i)}$  le prix de l'actif  $i \in \{1, \dots, N\}$  au temps  $t \in [0, 1]$ . On définit alors le rendement et le *yield* de l'actif  $i$  par

$$r_i := \frac{p_1^{(i)}}{p_0^{(i)}} - 1 ; \quad (1)$$

$$y_i := r_i + 1. \quad (2)$$

En notant  $\mathbf{Y} := (y_1, \dots, y_N)^T$ , on suppose que l'univers sur lequel on investit est défini par les paramètres suivants, connus à  $t = 0$ ,

$$\boldsymbol{\mu} := \mathbb{E}[\mathbf{Y}] ; \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\Omega} := \text{Var}[\mathbf{Y}]. \quad (4)$$

Il nous est de plus possible d'investir dans un actif sans risque, *i.e.* le *cash*, qui rémunère au taux  $r$ . On impose la condition

$$\boldsymbol{\mu} > (1+r)\mathbf{1}, \quad (5)$$

(<sup>2</sup>), qui vient de la rémunération du risque (en moyenne). On a donc un portefeuille dont la part investie dans le *cash* est  $a_0$ , et dans l'actif  $i$  est  $a_i$ , il vaut à la date  $t$

$$V_t = a_0 p_t^{\text{NRA}} + \sum_{i=1}^n a_i p_t^{(i)}. \quad (6)$$

En particulier aux dates  $t = 0$  et  $t = 1$ ,

$$V_0 = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0 ; \quad (7)$$

$$V_1 = a_0(1+r) + \mathbf{a}^T \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \mathbf{Y}, \quad (8)$$

avec des notations évidentes. On peut donc calculer l'espérance et la variance du portefeuille à  $t = 1$ ,

$$\mathbb{E}[V_1] = a_0(1+r) + \mathbf{a}^T \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \boldsymbol{\mu} ; \quad (9)$$

$$\text{Var}[V_1] = \mathbf{a}^T \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \boldsymbol{\Omega} \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \mathbf{a}. \quad (10)$$

### 1.1.2 Optimisation du portefeuille

L'optimisation se fait dans le cadre moyenne-variance, *i.e.* on maximise la moyenne des rendements sous une contrainte de variance<sup>3</sup>. On a alors le problème

$$\begin{aligned} & \max_{a_0, \mathbf{a}} \mathbb{E}[V_1] \\ \text{s.c.} \quad & \text{Var}[V_1] \leq \sigma^2 \\ & V_0 = v. \end{aligned} \quad (*)$$

2. Où cette notation est équivalente à, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mu_i > r$ .

3. La variance est donc vue ici comme une mesure de risque. Ce point est discutable étant donné que la variance prend en compte les mouvements « vers le haut ».

La résolution de ce problème nous donne l'ensemble des portefeuilles dominants.

**Définition 1.1** (Domination). Un portefeuille A domine un portefeuille B si  $\mathbb{E}[V_1^A] > \mathbb{E}[V_1^B]$  et  $\text{Var}[V_1^A] \leq \text{Var}[V_1^B]$ .

**Proposition 1.1.** Le problème (\*) est équivalent au problème

$$\begin{aligned} & \max_{a_0, \mathbf{a}} \mathbb{E}[V_1] \\ \text{s.c.} \quad & \text{Var}[V_1] = \sigma^2 \\ & V_0 = v. \end{aligned} \quad (**)$$

*Démonstration.* Soit le portefeuille A, composé de  $(a_0, \mathbf{a})$  et solution de (\*) tel que  $\text{Var}[V_1^A] < \sigma^2$ . On pose

$$\delta := \sqrt{\frac{\sigma^2}{\text{Var}[V_1^A]}}, \quad (11)$$

on peut donc écrire  $\delta = 1 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon > 0$ .

Soit alors le portefeuille B composé de  $(a_0 - \varepsilon \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0, \delta \mathbf{a})$ , d'où

$$\mathbb{E}[V_1^B] \triangleq \mathbb{E}[(a_0 - \varepsilon \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0)(1+r) + \delta \mathbf{a}^T \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \mathbf{Y}] \quad (12)$$

$$= \mathbb{E}[V_1^A] + \varepsilon \mathbf{a}^T \mathbf{p}_0 \underbrace{(\boldsymbol{\mu} - (1+r)\mathbf{1})}_{> 0}. \quad (13)$$

Donc par (5) on a  $\mathbb{E}[V_1^B] > \mathbb{E}[V_1^A]$  et  $\text{Var}[V_1^B] = \sigma^2$ .  $\square$

On note  $\boldsymbol{\omega}_a := \text{Diag}(\mathbf{p}_0) \mathbf{a}$ , la part en EUR investie dans l'actif risqué. Le problème (\*\*) se réécrit donc

$$\begin{aligned} & \max_{\boldsymbol{\omega}_a} (v - \boldsymbol{\omega}_a^T \mathbf{1})(1+r) + \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{s.c.} \quad & \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\omega}_a = \sigma^2. \end{aligned} \quad (**)$$

On utilise la méthode du Lagrangien pour résoudre ce problème,

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\omega}_a, \lambda) = (v - \boldsymbol{\omega}_a^T \mathbf{1})(1+r) + \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2} (\boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\omega}_a - \sigma^2), \quad (14)$$

ce qui nous donne pour ses dérivées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\omega}_a} = \boldsymbol{\mu} - (1+r)\mathbf{1} - \lambda \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\Omega}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \boldsymbol{\omega}_a^T \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\omega}_a - \sigma^2, \quad (16)$$

en annulant les dérivées on obtient alors

$$\boldsymbol{\omega}_a = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{\mu} - (1+r)\mathbf{1}); \quad (17)$$

$$a_0 = v - \boldsymbol{\omega}_a^T \mathbf{1}; \quad (18)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sigma} \sqrt{A + (1+r)^2 C - 2(1+r)B}, \quad (19)$$

où  $A := \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{\mu}$ ,  $B := \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{1}$  et  $C := \mathbf{1}^T \boldsymbol{\Omega}^{-1} \mathbf{1}$ .

### 1.1.3 Frontière efficiente

**Définition 1.2** (Frontière efficiente). On appelle frontière efficiente les points du plan  $(\sqrt{\text{Var}[V_1]}, \mathbb{E}[V_1])$  où  $V$  est un portefeuille qui résout (\*\*).

On a pour tous les portefeuilles dominants,

$$\mathbb{E}[V_1] = v(1+r) + \frac{1}{\lambda}(A + (1+r)^2C - 2(1+r)B); \quad (20)$$

$$\text{Var}[V_1] = \frac{1}{\lambda^2}(A + (1+r)^2C - 2(1+r)B), \quad (21)$$

ce qui nous donne immédiatement l'équation d'une droite

$$\mathbb{E}[V_1] = v(1+r) + \sqrt{\text{Var}[V_1]}\sqrt{A + (1+r)^2C - 2(1+r)B}. \quad (22)$$

### 1.1.4 Sans actif sans risque

On considère maintenant le cas où l'on ne peut pas investir dans le *cash*, on a alors le problème

$$\begin{aligned} & \max_{\omega_a} \omega_a^T \boldsymbol{\mu} \\ \text{s.c.} \quad & \omega_a^T \boldsymbol{\Omega} \omega_a = \sigma^2 \\ & \omega_a \mathbf{1} = v. \end{aligned} \quad (\star)$$

D'où le Lagrangien

$$\mathcal{L}(\omega_a, \lambda, \varphi) = \omega_a^T \boldsymbol{\mu} - \frac{\lambda}{2}(\omega_a^T \boldsymbol{\Omega} \omega_a - \sigma^2) - \varphi(\omega_a^T \mathbf{1} - v). \quad (23)$$

On procède de même que précédemment et la résolution nous donne

$$\omega_a = \frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \varphi \mathbf{1}); \quad (24)$$

$$\varphi = \frac{B - \lambda v}{C}; \quad (25)$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{AC - B^2}{\sigma^2 C - v^2}}, \quad (26)$$

avec les mêmes notations. On a alors

$$\mathbb{E}[V_1] = \frac{1}{\lambda}(A - \varphi B). \quad (27)$$

La solution au problème est une parabole dans le plan  $(\sqrt{\text{Var}[V_1]}, \mathbb{E}[V_1])$  et la frontière efficiente est la partie supérieure de cette parabole *i.e.* les solutions pour  $\lambda \geq 0$ . De plus, contrairement au cas précédent il y a des  $\sigma$  pour lesquels il n'y a pas de solutions<sup>4</sup>, il existe donc un portefeuille de variance minimum, *a priori* différente de 0.

## 1.2 Application sur un portefeuille de crédit

### 1.2.1 Présentation de notre univers

On va simuler un investissement parmi les 50 obligations de l'index « Markit iBoxx EUR High Yield Corporates BB Top 50 Mid Price TCA TRI », qui reflète la performance des 50 obligations d'entreprises les plus importantes et les plus liquides dont la notation

4. Vient du fait que  $\lambda$  est une racine, il faut donc que  $(AC - B^2)(C\sigma^2 - v^2) \geq 0$ .

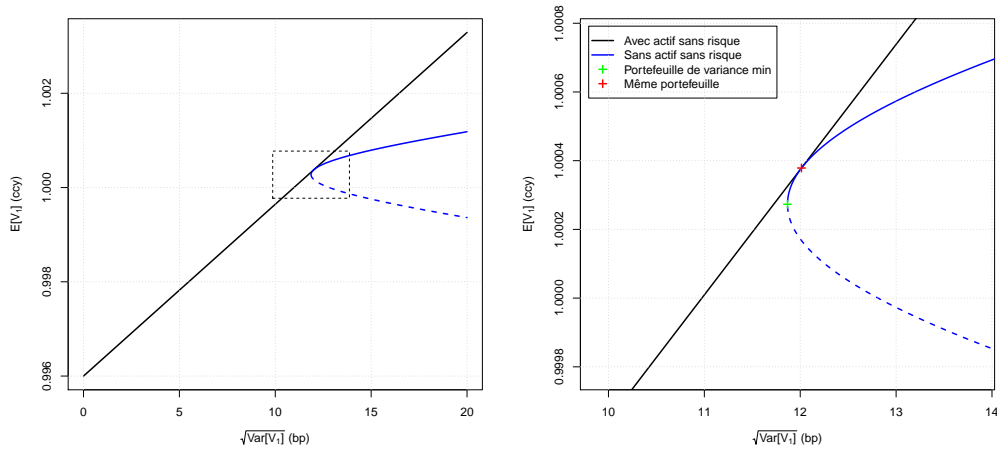


FIGURE 1 – Frontières efficaces avec estimation brute de la matrice de variance covariance.

se situe entre BB- et BB+. Pour récupérer les composants on s’est basé sur l’ETF « Lyxor iBoxx EUR Liquid High Yield BB UCITS ETF - Acc »<sup>(5)</sup> qui réplique cet indice.

On a le prix de ces 50 obligations<sup>6</sup> chaque jour du 2016-01-01 au 2018-03-29. Pour certaines obligations les données sont complètes sur cette période, pour d’autres (lorsqu’elles ont été émises après le 2016-01-01) on a des données incomplètes pour la période.

L’investissement se fera sur une fenêtre de une semaine. Étant donné que l’indice est en EUR, on impose un taux d’intérêt sans risque égal à  $r = 40$  bp<sup>(7)</sup> et on va se donner une somme initiale à investir  $v = 1$  EUR.

### 1.2.2 Résultat de l’optimisation moyenne-variance

À partir des équations (22) et (27) on obtient les frontières efficaces tracées à la Figure 1. On remarque notamment qu’il existe un portefeuille de variance minimum dans le cas où l’on a que des actifs risqués. La frontière dans le cas avec actif sans risque est naturellement au dessus de la parabole étant donné que l’on a un paramètre en plus. On a aussi un portefeuille qui est solution des deux problèmes.

## 2 Estimation de la matrice de variance covariance

### 2.1 Théorie des matrices aléatoires

#### 2.1.1 Distribution des valeurs propres

Cette section résume les résultats de [1, 2] et son utilisation dans notre cas.

Soit  $N$  variables aléatoires réelles  $X_1, \dots, X_N$  centrées et de variance  $\sigma^2$ . On observe  $T$  réalisations de ces variables aléatoires, qui sont résumées dans une matrice

5. <https://www.lyxoretf.fr/fr/retail/produits/etf-obligataires/lyxor-iboxx-eur-liquid-high-yield-bb-ucits-etf-acc/lu1215415214/eur>.

6. En fait pour deux obligations nous n’avons pas de données, on a donc au total 48 lignes.

7. <http://www.global-rates.com/interest-rates/libor/european-euro/2018.aspx>.

$\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{N,T}(\mathbb{R})$ . L'estimateur classique de la matrice de variance-covariance est,

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \frac{1}{T} \mathbf{M} \mathbf{M}^T. \quad (28)$$

Lorsque les  $X_i$  sont i.i.d. on a  $\mathbf{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$  (la matrice identité), mais avec probabilité 1,  $\widehat{\mathbf{\Omega}} \neq \sigma^2 \mathbf{I}_N$  lorsque  $T < \infty$ . La théorie nous dit alors que la distribution des valeurs propres de  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  lorsque  $N \rightarrow \infty$ ,  $T \rightarrow \infty$  et  $\frac{T}{N} = Q \geq 1$  fixé, est la distribution de MARCHENKO–PASTUR :

$$\rho_{\sigma^2}(x) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{\max}-x)(x-\lambda_{\min})}}{x} & \text{si } x \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (29)$$

avec

$$\lambda_{\min}^{\max} = \sigma^2 \left( 1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}} \right). \quad (30)$$

### 2.1.2 Application à l'estimation de matrices de variance-covariance

On suppose que l'on ait une matrice  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}_{N,T}(\mathbb{R})$  définie comme précédemment avec  $N$  et  $T$  grands, et  $\sigma^2$  connu. On note comme précédemment  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  l'estimateur classique de la matrice de variance-covariance, défini en (28). On peut écrire

$$\widehat{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{P} \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \mathbf{P}^T, \quad (31)$$

où les  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de  $\widehat{\mathbf{\Omega}}$  avec  $\lambda_1 > \dots > \lambda_N$ .

On fait alors la supposition suivante : il existe un  $\lambda^*$  pour lequel les  $\lambda_i \geq \lambda^*$  contiennent de l'information et les  $\lambda_i < \lambda^*$  sont du bruit. Au vu de la section précédente on a alors ces derniers qui suivent la distribution de MARCHENKO–PASTUR, tandis que les  $\lambda_i \geq \lambda^*$  n'appartiennent pas à l'intervalle  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ . Une fois exhibé  $\lambda^*$  on a une nouvelle estimation de la matrice de variance-covariance :

$$\widetilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{P} \text{Diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N) \mathbf{P}^T, \quad (32)$$

avec pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\tilde{\lambda}_i := \begin{cases} \lambda_i & \text{si } \lambda_i \geq \lambda^* \\ \frac{1}{\#(\lambda_i < \lambda^*)} \left( N\sigma^2 - \sum_{\lambda_i \geq \lambda^*} \lambda_i \right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (33)$$

En bref, on conserve les valeurs propres significatives et on remplace les autres par une constante qui conserve la trace,  $\text{Tr}(\mathbf{\Omega}) = N\sigma^2$ .

La question est maintenant de trouver  $\lambda^*$ . Pour cela, on défini

$$\tilde{\sigma}^2 := \sigma^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^i \lambda_j \quad (34)$$

la contribution à la variance des vecteurs qui sont (potentiellement) du bruit. Pour tout  $\tilde{\sigma}^2$  on a une distribution de MARCHENKO–PASTUR associée et donc un  $\lambda_{\max}^{(\tilde{\sigma}^2)}$  associé. Ces derniers vont être traités comme de potentiels  $\lambda^*$ . On calcule ensuite l'erreur<sup>8</sup> entre les  $\lambda_i < \lambda^*$  et la densité de MARCHENKO–PASTUR (avec  $\tilde{\sigma}^2$ ), le minimum de cette erreur nous donne  $\lambda^*$ . Voir le pseudo-code 1.

8. Par exemple l'erreur quadratique moyenne.

---

**Algorithm 1** Identification de  $\lambda^*$ 

---

**Require:**  $f$ , une fonction d'erreur

**Ensure:**  $e_k = \min_i e_i$

**for**  $i = 0$  **to**  $N$  **do**

$y_i \leftarrow \sigma^2 - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^i \lambda_j$

$e_i \leftarrow f((\lambda_j)_{i < j \leq N}, \rho_{y_i}(\cdot))$

**end for**

$k \leftarrow \text{which.min}(e)$

**return**  $\lambda_{\max}^{(y_i)}$

---

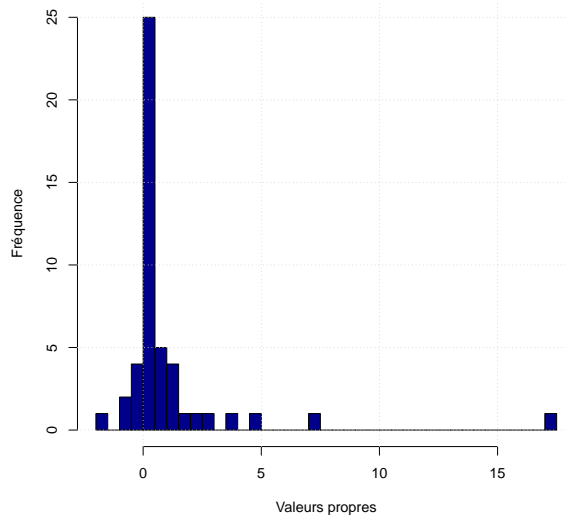


FIGURE 2 – Densité des valeurs propres de  $\mathbf{C}$ .

## 2.2 Estimation sur notre portefeuille

Dans notre cas on travaille sur les rendements centrés réduits, ce qui revient à vouloir estimer la matrice de corrélation que l'on notera  $\mathbf{C}$ . On a donc dans notre cas  $\sigma^2 = 1$ . On a déjà dit Section 1.2 que l'on a 48 obligations, sur une période de 2 ans ce qui nous donne 573 dates ; d'où  $Q = \frac{573}{48}$ .

Regardons dans un premier temps la distribution des valeurs propres de  $\mathbf{C}$ , présentée à la Figure 2. On remarque immédiatement que l'on a des valeurs propres négatives, ce qui est impossible pour une matrice de corrélation.

En prenant  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$  on a un  $\lambda_{\max}$  associé de 1.66, ce qui nous donne 7 valeurs propres (voir Figure 2) supérieures à cette valeur. Voir à la Figure 3 en rouge la distribution de MARCHENKO–PASTUR dans ce cas ci. Si l'on retranche la contribution à la plus haute valeur propre  $\lambda_1 = 17.1$  on obtient  $\tilde{\sigma}^2 = 1 - \frac{17.1}{48} = 0.64$ . Dans ce cas là on a  $\lambda_{\max} = 1.07$  et cette fois ci on a 10 valeurs propres qui sont supérieures à  $\lambda_{\max}$ . Cette distribution est tracée en vert à la Figure 3.

En répétant ce processus pour toutes les valeurs propres de  $\mathbf{C}$ , comme décrit avec le pseudo-code 1, on peut calculer l'erreur quadratique moyenne dans les différents cas. Celle-ci est tracée à la Figure 3, et l'on voit qu'elle est minimum pour  $i = 0$ , *i.e.* dans le tout premier cas, en prenant  $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2$ .

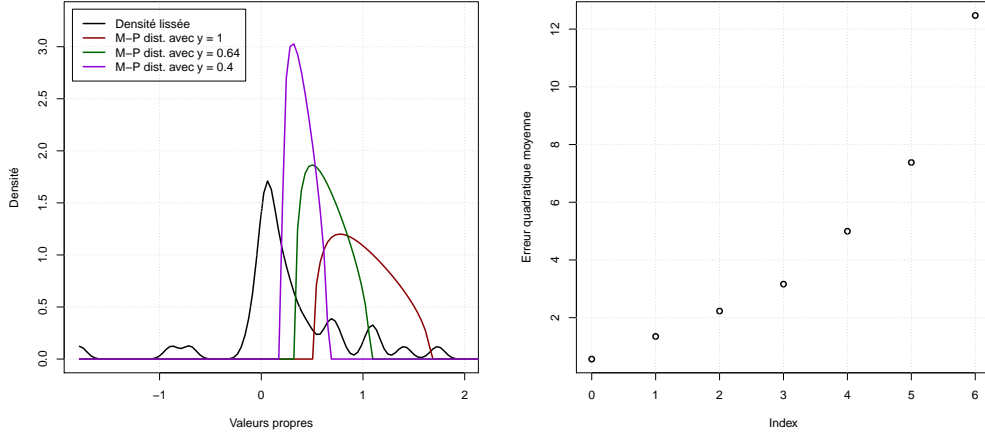


FIGURE 3 – Densité lissée des valeurs propres de  $\mathbf{C}$  et les distributions de MARCHENKO–PASTUR pour différents  $y$  (gauche) ; l’erreur quadratique moyenne comme au pseudo-code 1 (droite).

Maintenant que l’on a nos  $(\tilde{\lambda}_i)_i$  filtrés, on retrouve la matrice de corrélation filtrée avec la matrice de passage

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{P}\text{Diag}(\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_N)\mathbf{P}^T, \quad (35)$$

puis naturellement la matrice de variance-covariance

$$\tilde{\mathbf{\Omega}} = \mathbf{C} \otimes (\mathbf{V}\mathbf{V}^T), \quad (36)$$

où  $\mathbf{V} = \text{Diag}(\hat{\mathbf{\Omega}})$  <sup>(9)</sup>.

### 3 Comparaison entre la matrice brute et filtrée

On refait les calculs (22)–(27) pour obtenir les nouvelles frontières efficientes, elles sont représentées à la Figure 4.

Le première chose que l’on remarque est que les deux frontières dans le cas sans actif sans risque n’ont pas du tout la même forme. La nouvelle frontière nous apprend que précédemment (*i.e.* avec la matrice brute) on a surestimé le risque. Alors que dans l’article [1] les auteurs ont trouvé que le calcul avec la matrice brute sous-estime le risque (par rapport au calcul avec la matrice filtrée).

Étant donné que nous n’avons que 48 obligations sur une durée de 2 ans il est possible que la théorie des matrices aléatoires ne s’applique pas. En effet on rappelle qu’il faut que  $T \rightarrow \infty$  et  $N \rightarrow \infty$ ; les auteurs ne donnent cependant pas de valeur d’un couple  $(T, N)$  “grand” pour assurer que la théorie s’applique.

### 4 Conclusion

Pour comparer les deux frontières efficientes on aurait pu faire comme les auteurs de [1, 2], *i.e.* estimer les paramètres des frontières efficientes sur une période, puis comparer

9. Sous entendu l’extraction de la diagonale de  $\hat{\mathbf{\Omega}}$ , estimation non filtrée; et  $\otimes$  est la notation pour la multiplication élément par élément.



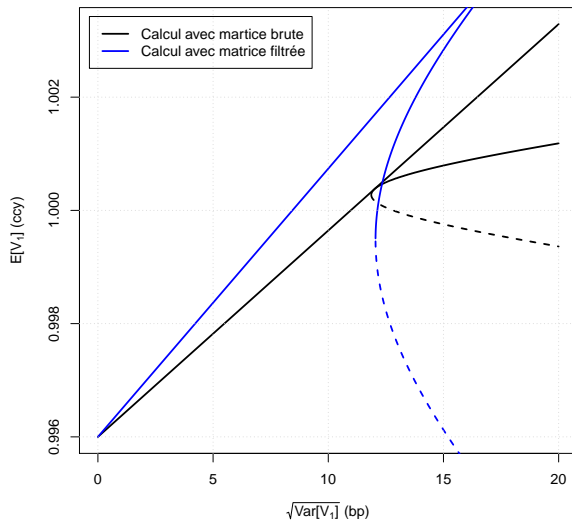


FIGURE 4 – Frontières efficaces avec et sans actif sans risque, avec la matrice brute et la matrice filtrée.

la réalisation les portefeuilles des frontières efficaces sur cette période (d’estimation) et une autre période disjointe de la précédente. Étant donné que l’on avait déjà peu de données (deux ans), on ne pouvait pas appliquer cette méthode.

Une perspective serait d’exhiber la loi (si elle existe) de l’estimateur de  $\lambda_{\max}$ , puisque pour l’instant on ne sait pas à partir de quel rang on peut dire que  $T \rightarrow \infty$  et  $N \rightarrow \infty$ . Ensuite dans notre pseudo-code 1 on pourrait plutôt retourner un quantile<sup>10</sup> de cette loi, plutôt que l’estimation directe comme dans ce rapport.

## Références

- [1] L. LALOUX, P. CIZEAU, J.-P. BOUCHAUD, AND M. POTTERS, *Noise Dressing of Financial Correlation Matrices*, *Physical Review Letters*, 83 (1999), pp. 1467–1470.
- [2] ———, *Random Matrix Theory and Financial Correlations*, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3 (2000), pp. 391–397.
- [3] H. MARKOWITZ, *Portfolio Selection*, *The Journal of Finance*, 7 (1952), pp. 77–91.
- [4] R CORE TEAM, *R : A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2017.

---

10. Par exemple 95 %.